

А. И. Сенин, С. В. Чернавский,  
Г. А. Лесников

## ОЦЕНКА ИНДЕКСА МОДУЛЯЦИИ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА С НЕПРЕРЫВНОЙ ФАЗОЙ

*Рассмотрен метод оценки индекса модуляции для частотно-модулированного сигнала с непрерывной фазой. Приведены результаты имитационного моделирования.*

**E-mail:** chernavsky\_sv@list.ru

**Ключевые слова:** частотно-модулированный сигнал, индекс модуляции, оценка, функционал правдоподобия.

При разработке системы связи важное значение имеет выбранный тип модуляции, поскольку именно он во многом определяет помехоустойчивость системы и эффективность использования частотного ресурса. При ограниченных энергетических ресурсах и высоких требованиях к экономии частотного ресурса особое значение имеет модуляция с непрерывной фазой. Соответствующим подбором параметров модулированного сигнала и выбором эффективного алгоритма демодуляции можно добиться хороших характеристик как по помехоустойчивости, так и по занимаемой полосе частот [1, 2]. При использовании когерентной демодуляции помехоустойчивость системы существенно зависит от точности согласования индексов модуляции на приемной и передающей сторонах [1, 3]. В связи с этим необходимо стабилизировать индекс модуляции, например, путем использования схемы слежения на передающей стороне или путем оценки рассогласования в индексе модуляции на приемной стороне и передачи команд коррекции по обратному каналу на передающую сторону. В настоящей работе рассмотрен метод оценки рассогласования индекса модуляции на основе приближенного решения уравнения правдоподобия.

В рассматриваемом случае принимаемый сигнал имеет вид [1, 4–10]

$$u(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left( 2\pi f_0 t + 2\pi h \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right) + n(t), \quad (1)$$

где  $E$  — энергия полезного сигнала длительностью  $T$ , соответствующего одному передаваемому символу;  $f_0$  — несущая частота сигнала;  $h = h_0 + \Delta h$  — индекс модуляции принимаемого сигнала;  $h_0$  — ожидаемый индекс модуляции;  $\Delta h$  — рассогласование в индексе модуляции из-за нестабильности частоты генератора;  $\{\alpha_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , — специально введенная последовательность двоичных символов для

оценки индекса модуляции;  $q(t)$  — фазовый импульс длительностью  $L$  информационных символов [1, 5];  $n(t)$  — белый гауссов шум.

Опорный сигнал на приемной стороне

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left( 2\pi f_0 t + 2\pi h_0 \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right). \quad (2)$$

Как известно, общим подходом оценки параметров сигнала является решение уравнения правдоподобия [6–8, 11]

$$\frac{\partial \Lambda(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

или эквивалентного ему

$$\frac{\partial \ln \Lambda(\lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad (3)$$

где  $\Lambda(\lambda)$  — функционал правдоподобия относительно измеряемого параметра  $\lambda$ .

При известных параметрах сигнала (кроме измеряемого) и помехе типа белого гауссова шума функционал правдоподобия  $\Lambda(\lambda)$  определяется как [11]

$$\Lambda(\lambda) = C \exp \left( -\frac{1}{N_0} \int_0^{NT} [u(t) - s(t, \lambda)]^2 dt \right), \quad (4)$$

где  $C$  — константа;  $N_0$  — односторонняя спектральная плотность мощности шума.

Поскольку энергия сигнала не зависит от индекса модуляции, уравнение правдоподобия (3) с учетом (4) сводится к виду

$$\frac{\partial \ln(\Lambda(\lambda))}{\partial \lambda} = \frac{\partial Z(h)}{\partial h} = 0, \quad (5)$$

где

$$Z(h) = \int_0^{NT} u(t) s(t, h) dt \quad (6)$$

— корреляционный интеграл.

Подставляя (1) и (2) в (6) и пренебрегая шумом, получаем

$$Z(h) = \frac{2E}{T} \int_0^{NT} \cos \left( 2\pi f_0 t + 2\pi h \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right) \times \\ \times \cos \left( 2\pi f_0 t + 2\pi h_0 \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2E}{T} \frac{1}{2} \int_0^{NT} \cos \left( 2\pi (h - h_0) \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right) dt + \\
&+ \frac{2E}{T} \frac{1}{2} \int_0^{NT} \cos \left( 4\pi f_0 t + 2\pi (h + h_0) \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right) dt. \quad (7)
\end{aligned}$$

С учетом того, что  $h = h_0 + \Delta h$ , выражение (7) приводится к виду

$$\begin{aligned}
Z(\Delta h) &= \frac{E}{T} \int_0^{NT} \cos \left( 2\pi \Delta h \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right) dt + \\
&+ \frac{E}{T} \int_0^{NT} \cos \left( 4\pi f_0 t + 2\pi (2h_0 + \Delta h) \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right) dt. \quad (8)
\end{aligned}$$

Вторым слагаемым в формуле (8) можно пренебречь, поскольку подинтегральная функция является быстроосциллирующей, и выражение для  $Z(\Delta h)$  примет вид

$$Z(\Delta h) \approx \frac{E}{T} \int_0^{NT} \cos \left( 2\pi \Delta h \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right) dt. \quad (9)$$

При малых значениях аргумента косинус в формуле (9) можно заменить первыми двумя членами его разложения в ряд Маклорена:

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Тогда при  $2\pi \Delta h \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \ll 1$

$$Z(\Delta h) \approx \frac{E}{T} \int_0^{NT} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( 2\pi \Delta h \sum_{i=0}^N \alpha_i q(t - iT) \right)^2 \right] dt. \quad (10)$$

Далее будем рассматривать случай  $L = 1$  (фазовый импульс имеет длительность  $T$ ).

При указанном ограничении

$$Z(\Delta h) \approx EN - \frac{E}{T} \pi^2 \Delta h^2 \int_0^{NT} \left( \sum_{i=0}^N q^2(t - iT) \right) dt -$$

$$- 2 \frac{E}{T} \pi^2 \Delta h^2 \int_0^{NT} \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j>i}^N \alpha_i \alpha_j q(t - iT) q(t - jT) \right) dt. \quad (11)$$

Первое слагаемое в выражении (11) — это значение корреляционного интеграла в отсутствие рассогласования в индексе модуляции, второе слагаемое, зависящее только от формы выбранного фазового импульса  $q(t)$ , характеризует уменьшение значения корреляционного интеграла из-за рассогласования в индексе модуляции, а третье слагаемое — уменьшение значения корреляционного интеграла, определяемое не только формой импульса  $q(t)$ , но и видом введенной последовательности  $\{\alpha_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, значение корреляционного интеграла при рассогласовании в индексе модуляции — это случайная величина, зависящая от последовательности символов  $\{\alpha_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Из выражения (11) следует, что рассогласование в индексе модуляции оказывает наиболее сильное влияние на значение корреляционного интеграла при последовательности одинаковых символов  $\{\alpha_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . При этом

$$Z_{\min}(\Delta h) \approx EN - \frac{1}{6} \pi^2 \Delta h^2 N^3 E. \quad (12)$$

Анализ выражения (11) также показывает, что рассогласование в индексе модуляции окажет наименьшее влияние на значение корреляционного интеграла при последовательности  $\{\alpha_i\}$  чередующихся символов вида  $+1, -1, +1, -1, +1, \dots$ . В этом случае

$$Z_{\max}(\Delta h) \approx EN - \frac{1}{6} \pi^2 \Delta h^2 N E. \quad (13)$$

Для всех других последовательностей символов  $\{\alpha_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , значения корреляционных интегралов будут располагаться между значениями корреляционного интеграла для двух рассмотренных ранее случаев. При этом математическое ожидание корреляционного интеграла (усреднение проводится по всем возможным последовательностям символов  $\{\alpha_i\}$  длиной  $N$ )

$$M\{Z(\Delta h)\} \approx EN - \frac{1}{4} \pi^2 \Delta h^2 EN^2 T + \frac{1}{12} \pi^2 \Delta h^2 EN, \quad (14)$$

где  $M\{Z\}$  — математическое ожидание величины  $Z$ .

Для частотно-модулированного сигнала с непрерывной фазой (ЧМНФ), когда

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{t}{2T} & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ \frac{1}{2} & \text{при } t > T, \end{cases}$$

можно найти точное выражение для значения корреляционного интеграла. При последовательности одинаковых символов оно имеет вид

$$Z_{\min \text{ ЧМНФ}}(\Delta h) \approx EN \frac{\sin(\pi \Delta h)}{\pi \Delta h}, \quad (15)$$

а в случае последовательности чередующихся символов оно определяется как

$$Z_{\max \text{ ЧМНФ}}(\Delta h) \approx E \frac{\sin(N\pi \Delta h)}{\pi \Delta h}. \quad (16)$$

Точная и приближенная зависимости нормированного корреляционного интеграла для ЧМНФ сигнала с  $h_0 = 0,5$  от рассогласования в индексе модуляции в случае введенной последовательности  $\{\alpha_i\}$  из восьми одинаковых символов показана на рис. 1 (кривые 1 и 2). Также на рис. 1 приведены аналогичные зависимости для последовательности чередующихся символов (кривые 3 и 4).

Из приведенных зависимостей следует, что приближенные выражения (12) и (13) на основе разложения косинуса в ряд Маклорена хорошо согласуются с точными выражениями (15) и (16) в достаточно широком интервале рассогласований в индексе модуляции, что говорит о справедливости подхода, используемого в данной работе.

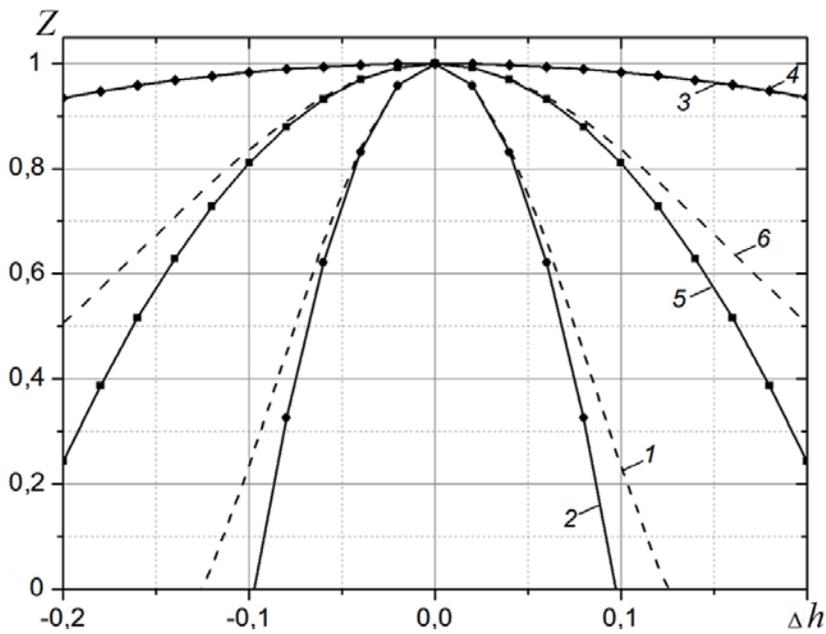
Кроме того, на рис. 1 представлены зависимость нормированного корреляционного интеграла от рассогласования в индексе модуляции, усредненная по всем возможным последовательностям символов, рассчитанная по формуле (14) (кривая 5), и зависимость, полученная непосредственным усреднением смоделированных зависимостей (кривая 6).

Важный вывод, который следует из формулы (11), заключается в том, что зависимость корреляционного интеграла при малых рассогласованиях в индексе модуляции приближенно можно представить как

$$Z(\Delta h) \approx E_Z - AE_Z \Delta h^2, \quad (17)$$

где  $E_Z$  — значение корреляционного интеграла в случае отсутствия рассогласования;  $A$  — коэффициент, зависящий от последовательности введенных символов  $\{\alpha_i\}$ .

Зависимость (17) можно использовать для оценки рассогласования в индексе модуляции. Как указывалось ранее, для оптимальной



**Рис. 1. Графики зависимости корреляционного интеграла от рассогласования в индексе модуляции (штриховые линии — точные зависимости, сплошные — приближенные)**

оценки необходимо решить уравнение (5). Приближенным методом получения оценки является использование дискриминаторов [11, 13]. Для построения алгоритма работы дискриминатора в уравнении (5) заменим производную на отношение конечных разностей:

$$\frac{\partial Z(h)}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \int_0^{NT} u(t) s(t, h_0) dt \approx \frac{\int_0^{NT} u(t) s(t, h_0 + \Delta h_0) dt - \int_0^{NT} u(t) s(t, h_0 - \Delta h_0) dt}{2\Delta h_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{2\Delta h_0} = 0,$$

где

$$Z_{1,2} = \int_0^{NT} u(t) s(t, h_0 \mp \Delta h_0) dt, \quad (18)$$

$\Delta h_0$  — выбранное конечное приращение индекса модуляции. Таким образом, дискриминатор, который выполняет приближенную оценку индекса модуляции, состоит из пары корреляторов, настроенных на сигналы с индексами модуляции  $h_0 - \Delta h_0$  и  $h_0 + \Delta h_0$ .

Для получения оценки рассогласования в индексе модуляции с помощью дискриминатора будем использовать подход [14], суть которого состоит в формировании нечетной функции  $F(Z_1, Z_2)$ , такой что

$$F(Z_1, Z_2) \approx \mu_Z \Delta h,$$

где  $\mu_Z$  — крутизна дискриминационной характеристики.

Рассмотрим функцию

$$F(Z_1, Z_2) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad (19)$$

где с учетом (17) и (18)

$$\begin{aligned} Z_1 &\approx E_Z - E_Z A (\Delta h - \Delta h_0)^2 \\ Z_2 &\approx E_Z - E_Z A (\Delta h + \Delta h_0)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

После подстановки (20) в (19) находим

$$F(Z_1, Z_2) = \frac{2E_Z A \Delta h \Delta h_0}{2E_Z - 2E_Z A (\Delta h^2 + \Delta h_0^2)} \approx A \Delta h_0 \Delta h = \mu_Z \Delta h,$$

где  $\mu_Z = A \Delta h_0$ .

Таким образом, оценка рассогласования в индексе модуляции

$$\Delta \hat{h} \approx \frac{1}{\mu_Z} \cdot \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (21)$$

В ходе процедуры оценки по выражению (21) последовательность  $\{\alpha_i\}$  может меняться. Так, в начале процедуры, когда неопределенность рассогласования велика, можно использовать последовательности символов, при которых зависимость корреляционного интеграла от рассогласования в индексе модуляции минимальна (например, последовательность чередующихся символов  $+1, -1, +1, -1, +1, \dots$ ). При этом диапазон измерения рассогласования в индексе модуляции будет большой, а точность оценки невысокой из-за низкой крутизны дискриминационной характеристики. В конце процедуры оценки можно использовать последовательность одинаковых информационных символов для получения высокой точности. При такой процедуре оценки в два этапа введение специальной последовательности не требуется, поскольку на первом этапе можно использовать последовательность, введенную в сообщение для тактовой синхронизации, а на втором этапе — последовательность, введенную в сообщение для частотной синхронизации.

Кроме того, как следует из выражений (10) и (11), значение корреляционного интеграла при рассогласовании в индексе модуляции в общем случае зависит от числа обрабатываемых символов. Например, с учетом (12) коэффициент  $A$  в формуле (17) для случая последовательности одинаковых информационных символов будет определяться выражением

$$A = \frac{1}{6} \pi^2 \Delta h^2 N^2,$$

и, следовательно, чем длиннее введенная последовательность символов  $\{\alpha_i\}$ , тем больше уменьшение значения корреляционного интеграла при фиксированном рассогласовании в индексе модуляции по срав-

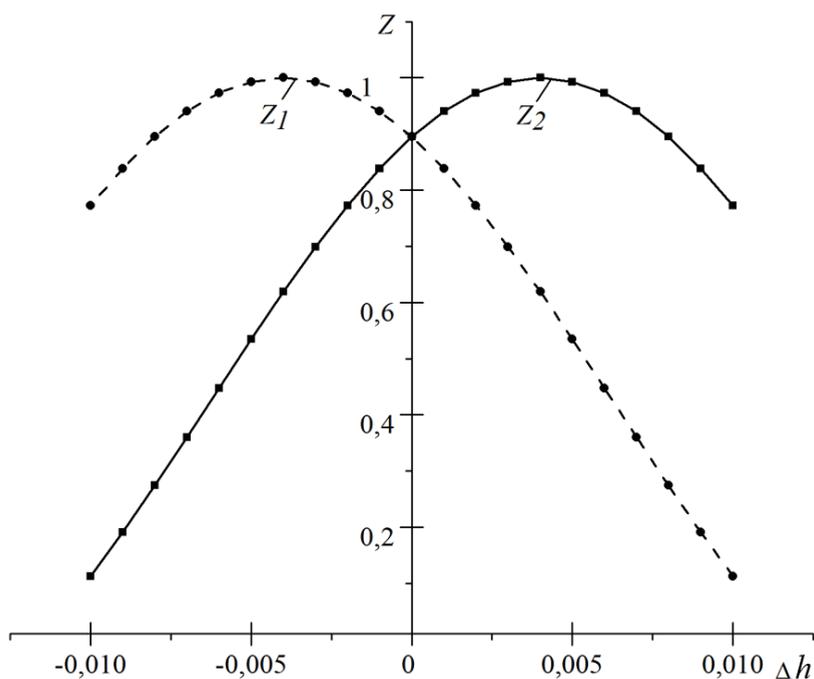
нению со случаем без рассогласования. Это приводит к увеличению крутизны дискриминационной характеристики и, соответственно, к повышению точности оценивания рассогласования в индексе модуляции. Однако при этом диапазон измерения рассогласований в индексе модуляции сужается.

В случае, когда для оценки рассогласования в индексе модуляции в сообщение не вводится специальная последовательность, для формирования опорных сигналов можно использовать демодулированные символы. При этом необходимо по демодулированным символам рассчитывать коэффициент  $A$  и использовать выражение (21) для оценки рассогласования в индексе модуляции.

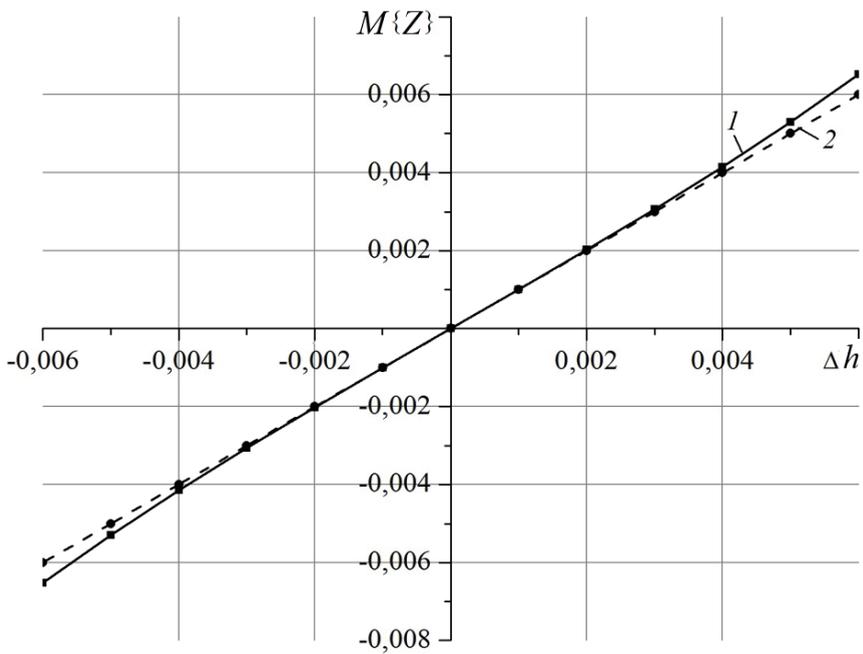
В целях нахождения основных статистических характеристик оценки (21) было проведено имитационное моделирование. Для оценки рассогласования в индексе модуляции ЧМНФ-сигнала с  $h_0 = 0,5$  использовалась последовательность  $\{\alpha_i\}$  длиной 256 символов, которая задавалась следующим образом:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 0 \pmod{3}; \\ 0, & \text{если } i = 0 \pmod{17}; \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Корреляторы в дискриминаторе имели расстройки в индексах модуляции  $\Delta h_{1,2} = \pm 0,004$  от ожидаемого значения. Зависимости сигналов на выходах обоих корреляторов, нормированных к энергии принимаемого сигнала, от рассогласования в индексе модуляции показаны на рис. 2.



**Рис. 2.** Зависимости сигналов на выходах корреляторов от рассогласования в индексе модуляции принимаемого сигнала



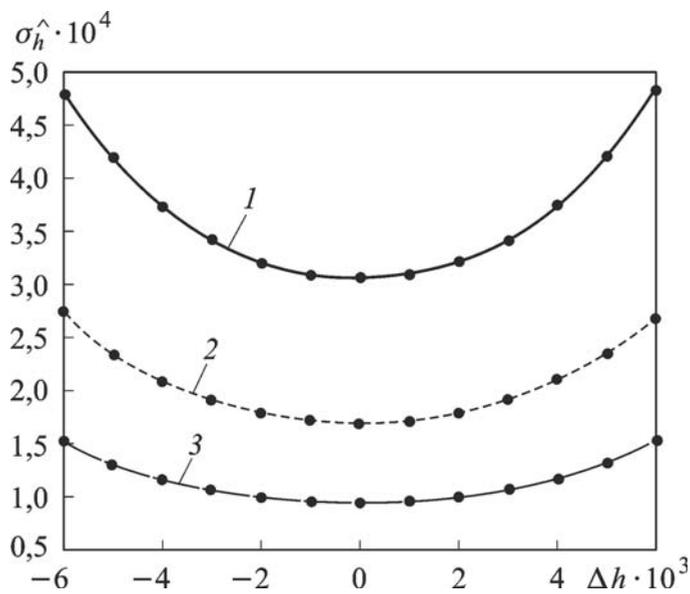
**Рис. 3. Зависимость математического ожидания оценки рассогласования в индексе модуляции от рассогласования в индексе модуляции:**

1 — моделирование при  $\frac{E}{N_0} = 10$  дБ; 2 — идеальная зависимость

Зависимость математического ожидания оценки рассогласования в индексе модуляции  $M\{\Delta\hat{h}\}$  от рассогласования в индексе модуляции  $\Delta h$  для отношения энергии бита к спектральной плотности мощности  $\frac{E}{N_0} = 10$  дБ показана на рис. 3, из которого видно, что в диапазоне рассогласования в индексе модуляции от  $-0,005$  до  $0,005$  математическое ожидание оценки  $\Delta\hat{h}$  практически совпадает с истинным значением рассогласования в индексе модуляции  $\Delta h$ .

На рис. 4 приведены зависимости среднеквадратического отклонения (СКО) оценки рассогласования в индексе модуляции  $\sigma_{\Delta\hat{h}}$  от значения рассогласования в индексе модуляции  $\Delta h$  при различных отношениях  $E/N_0$ .

Таким образом, рассмотрен метод оценки рассогласования в индексе модуляции для сигнала с непрерывной фазой. Получены аналитические зависимости значения корреляционного интеграла при наличии рассогласования в индексах модуляции от последовательности символов  $\alpha_i$  и исследованы два крайних случая: наименьшей и наибольшей зависимости значения корреляционного интеграла от рассогласования в индексе модуляции. Путем имитационного моделирования получены зависимости СКО оценки от рассогласования в индексе модуляции при фиксированных отношениях сигнал-шум. Описанный в настоящей статье метод оценки индекса модуляции может быть использован для точной подстройки индекса модуляции в системах передачи информации с частотно-модулированными сигналами. Полученное выражение



**Рис. 4.** Графики зависимости среднеквадратичного отклонения оценки рассогласования в индексе модуляции от рассогласования в индексе модуляции при различных отношениях  $\frac{E}{N_0}$ :

$$1 - \frac{E}{N_0} = 5 \text{ дБ}; \quad 2 - \frac{E}{N_0} = 10 \text{ дБ}; \quad 3 - \frac{E}{N_0} = 15 \text{ дБ}$$

для оценки индекса модуляции является удобным для изучения точностных характеристик оценки индекса модуляции в системах связи с когерентной демодуляцией.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anderson J. B., Aulin T., Sundberg C. E-W. Digital Phase Modulation. – New York: Plenum, 1986. – 504 с.
2. Крючков И. В., Сенин А. И., Чернавский С. В. Спектральные и энергетические характеристики сигналов с непрерывной фазой и гауссовской фильтрацией для широкополосной системы связи // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2011. – № 4. – С. 111–118.
3. Сенин А. И., Чернавский С. В. Влияние рассогласования в индексе модуляции на помехоустойчивость системы связи с частотно-модулированными сигналами с непрерывной фазой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2012. – № 2. 109–121.
4. Ферр К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра / Пер. с англ.; Под ред. В.И. Журавлева. – М.: Радио и связь, 2000. – 520 с.
5. Прокис Дж. Цифровая связь / Пер. с англ.; Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь. 2000. – 800 с.
6. Акимов П. С., Сенин А. И., Соленов В. И. Сигналы и их обработка в информационных системах: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1994. – 256 с.
7. Васин В. А., Калмыков В. В., Себекин Ю. Н. и др. Радиосистемы передачи информации: Учеб. пособие для вузов / Под ред. И.Б. Федорова и В.В. Калмыкова. – М.: Горячая линия — Телеком, 2005. – 472 с.
8. Васин В. А., Власов И. Б., Дмитриев Д. Д. и др. Информационные технологии в радиотехнических системах: Учеб. пособие. / Под ред. И.Б. Федорова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 868 с.

9. Aulin T. and Sundberg C. -E. Continuous phase modulation. Part 1: Full response signaling // IEEE Trans. Commun. COM-29. – 1981. – P. 196–209.
10. Aulin T. and Sundberg C. -E. Continuous phase modulation. Part 2: Partial response signaling // IEEE Trans. Commun. COM-29. – 1981. – P. 210–225.
11. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2004. – 423 с.
12. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
13. Леонов А. И., Фомичев К. И. Моноимпульсная радиолокация. – М.: Сов. радио, 1970. – 392 с.

Статья поступила в редакцию 13.03.2012

Александр Иванович Сенин окончил в 1963 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Радиоэлектронные системы и устройства” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области радиоэлектроники.

A.I. Senin graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1963. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Radio Electronic Systems and Devices” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 150 publications in field of radio electronics.

Сергей Владимирович Чернавский окончил в 2010 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Инженер НИИ РЭТ МГТУ им. Н.Э. Баумана, аспирант кафедры “Радиоэлектронные системы и устройства” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор восьми научных работ в области радиоэлектроники.

S.V. Chernavsky graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2010. Engineer of the Research Institute for Radio Electronic Technology of the Bauman Moscow State Technical University, post-graduate of “Radio Electronic Systems and Devices” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of eight publications in the field of radio electronics.

Григорий Александрович Лесников — студент кафедры “Радиоэлектронные системы и устройства” МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер НИИ РЭТ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех научных работ в области радиоэлектроники.

G.A. Lesnikov — 6th year student of “Radio Electronic Systems and Devices” department of the Bauman Moscow State Technical University, engineer of the Research Institute for Radio Electronic Technology of the Bauman Moscow State Technical University. Author of three publications in field of radio electronics.