

АНАЛИЗ АДЕКВАТНОСТИ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ АНАЛОГОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВГ.В. Анцев^{1,2}

ancevgv@radar-mms.local

Л.Н. Лысенко³

kafsm3@sm.bmstu.ru

В.А. Петров¹¹ АО «НПП «Радар ммс», Санкт-Петербург, Российская Федерация² АО «Концерн «Моринформсистема-Агат», Москва, Российская Федерация³ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**Аннотация**

Проведен анализ адекватности цифровой модели аналоговой линейной динамической системы на основе оценки влияния квантования данных по времени в устройствах цифровой обработки сигналов и его связи с теоремой Котельникова — Шеннона. Анализ ориентирован на возможность учета таких тонких явлений, как наложение высоких частот, обеспечение допустимого фазового сдвига управляющих сигналов и потребных частотных коэффициентов передачи системы в целом и ее отдельных элементов. В качестве принятого критерия предложен частотный коэффициент относительной методической погрешности схем численного интегрирования и цифровой модели системы, характеризующий адекватность модели, а также достоверность и точность процесса моделирования в целом. Разработанные теоретические основы общего подхода проиллюстрированы методикой выбора параметров и анализа адекватности цифровой модели канала управления высотой полета крылатой ракеты тактического назначения

Ключевые слова

Динамическая система, цифровая и аналоговая модели, адекватность, частотные характеристики, методические погрешности, запаздывание обратных связей

Поступила в редакцию 19.04.2018

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Введение. Фундаментальным теоретическим условием работоспособности цифровых систем передачи и обработки сигналов является требование «теоремы отсчетов» В.А. Котельникова к частоте квантования аналогового сигнала во времени. С подачи авторов англоязычной литературы ее называют по-разному, однако наиболее часто используют название этой теоремы как «теорема Котельникова — Шеннона».

В формулировке В.А. Котельникова теорема звучит так: «Любую функцию $f(t)$, состоящую из частот от 0 до f_c , можно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через $1/(2f_c)$ секунд» [1]. Следовательно, эта теорема обслуживает нужды лишь систем передачи сигналов без искажения. Однако имеет место и такое замечание [2]: «...трактовка теоремы Котельникова — Шеннона об использовании для восстановления сигнала на приемной стороне с использованием отсчетов в реальном масштабе времени

является широко распространенным заблуждением. На самом деле при доказательстве теоремы используются «все отсчеты» на данном отрезке времени, восстановление сигнала осуществляется в отложенном («застывшем») режиме времени». Нас же интересует динамика аналоговых систем управления летательных аппаратов (ЛА) в реальном масштабе времени.

Применительно к системам автоматического управления, управления движением и моделирования любых динамических систем эта теорема определяет лишь необходимое условие их работоспособности, но не является гарантом достаточности обеспечения требований точности и адекватности поведения цифровой модели и аналоговой динамической системы с цифровым управлением. Здесь возникают более тонкие проблемы, например, наложение высоких частот, проблемы обеспечения допустимого фазового сдвига сигналов и потребных коэффициентов передачи как системы в целом, так и ее отдельных звеньев. Важным становится поведение цифрового устройства в желаемой полосе частот. Одной из наиболее ранних работ в этой области была статья Дж. Солзера, опубликованная в [3], где он ввел в рассмотрение частотные характеристики схем численного интегрирования (СЧИ) (прямоугольников, трапеций, $(1/3$ и $3/8)$ Симпсона и Уэддла) и идеального аналогового интегратора, а затем, взяв отношения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) схем численного интегрирования к АЧХ идеального интегратора, продемонстрировал их расхождение.

Следуя Дж. Солзеру, но с несколько иных математических позиций, не обошел этот вопрос своим вниманием и Я.З. Цыпкин в книгах [4–6], ставших классикой по теории импульсных систем. Как и Дж. Солзер, он рассматривал отношение АЧХ СЧИ и идеального интегратора, что качественно демонстрирует расхождение их функционирования, но не дает количественной оценки ожидаемой точности преобразования данных. Опора только на АЧХ обусловила ошибочность суждения о способе прямоугольников как более точном в сравнении со способом трапеций. К тому же в таблицах относительной погрешности рассматриваемых способов СЧИ (табл. № 6.3, см. [4] и 7.1, см. [5]), к сожалению, содержатся ошибочные численные данные.

Предпосылки обобщенного анализа. Сформулируем предпосылки для получения общего решения, лишь после этого перейдем к частностям и повторим в какой-то части рассуждения о частотных ошибках СЧИ.

Если для используемой СЧИ обозначить входную и выходную величины как $x[n]$ и $y[n]$; периоды, частоты квантования сигналов по времени и входного гармонического сигнала как T_{kv} , ω_{kv} и T_c , ω_c ; относительную частоту сигнала, как $\bar{\omega} = \omega_c T_{kv}$, то для рассматриваемых СЧИ получим следующее [6]:

$$y[n] = y[n-1] + T_{kv}x[n-1]$$

— при способе прямоугольников;

$$y[n] = y[n-1] + (T_{kv}/2)(x[n] + x[n-1])$$

— при способе трапеций;

$$y[n] = y[n-2] + (T_{kv}/3)(x[n] + 4x[n-1] + x[n-2])$$

— при способе (1/3) Симпсона;

$$y[n] = y[n-3] + (3T_{kv}/8)(x[n] + 3x[n-1] + 3x[n-2] + x[n-3])$$

— при способе (3/8) Симпсона;

$$y[n] = y[n-6] + (3T_{kv}/10)(x[n] + 5x[n-1] + x[n-2] + 6x[n-3] + x[n-4] + 5x[n-5] + x[n-6])$$

— при способе Уэддля.

Подвергнув эти соотношения Z -преобразованию и подставив

$$z = \exp(-j\omega_c T_{kv}), \quad (1)$$

можно получить частотные характеристики этих схем соответственно:

$$W_{pr}(j\omega_c) = \frac{1}{j\omega_c} \left(\frac{\bar{\omega}/\sin(\bar{\omega})}{1 + j \operatorname{tg}(\bar{\omega}/2)} \right);$$

$$W_T(j\omega_c) = \frac{1}{j\omega_c} \left(\frac{\bar{\omega}/2}{\operatorname{tg}(\bar{\omega}/2)} \right);$$

$$W_{(1/3)S}(j\omega_c) = \frac{1}{j\omega_c} \left(\frac{\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega})} \frac{(2 + \cos(\bar{\omega}))}{3} \right);$$

$$W_{(3/8)S}(j\omega_c) = \frac{1}{j\omega_c} \left(\frac{(\bar{\omega}/2)}{\sin(\bar{\omega}/2)} \frac{3 \cos^3(\bar{\omega}/2)}{(4 \cos^2(\bar{\omega}/2) - 1)} \right);$$

$$W_{Ue}(j\omega_c) = \frac{1}{j\omega_c} \left(\frac{\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega})} \frac{3(\cos^2(\bar{\omega}) + 3 \cos(\bar{\omega}) + 1)}{5(1 + 2 \cos(\bar{\omega}))} \right).$$

Обращаясь к приведенным частотным характеристикам, отметим, что они описываются выражением

$$W_{Sdi}(j\omega_c) = \frac{1}{j\omega_c} \left(\frac{\mu}{1 + j\nu} \right), \quad (2)$$

где параметры μ и ν — функции относительной частоты $\bar{\omega} = \omega_c T_{kv}$ и для каждого метода численного интегрирования элементарно определяются сравнением (2) с соответствующей частотной характеристикой; при этом $\nu \neq 0$ только для схемы прямоугольников. Следовательно, только схема прямоугольников вносит дополнительный сдвиг по фазе в вырабатываемый сигнал, и все схемы деформируют сигнал по амплитуде.

Передающая функция идеального непрерывного интегратора, как известно, имеет вид

$$W_{id}(j\omega_c) = (1/j\omega_c).$$

Для оценки качества СЧИ введем частотный коэффициент методической погрешности

$$K_m(j\bar{\omega}) = \left(\frac{W_{id}(j\omega_c) - W_{Sdi}(j\omega_c)}{W_{id}(j\omega_c)} \right) = \left(\frac{1 - \mu + j\nu}{1 + j\nu} \right).$$

Для оценки амплитуды ошибки вычислим модуль этого коэффициента и дополнительный фазовый сдвиг ошибки выходного сигнала СЧИ:

$$K_m(\bar{\omega}) = |K_m(j\bar{\omega})| = \sqrt{\frac{(1 - \mu)^2 + \nu^2}{(1 + \nu^2)}}; \quad \varphi_m(\bar{\omega}) = \text{arctg} \left(\frac{\mu\nu}{(1 - \mu + \nu^2)} \right).$$

Поскольку параметр ν отличен от нуля только у метода прямоугольников, то для всех остальных схем

$$K_m(\bar{\omega}) = (1 - \mu) \text{ и } \varphi_m(\bar{\omega}) = 0,$$

а для метода прямоугольников

$$(\varphi_m(\bar{\omega}))_{pr} = \text{arctg} \left(\frac{\bar{\omega}/2}{(1 - (\bar{\omega}/2) / \text{tg}(\bar{\omega}/2))} \right).$$

Если на выходе идеального аналогового интегратора был бы сигнал

$$y(t) = A \sin \omega_c t,$$

то динамическая погрешность СЧИ в тактовых точках поступления и съема информации будет равна

$$\Delta y[n] = K_m(\bar{\omega}) A \sin(\bar{\omega}n + \varphi_m(\bar{\omega})).$$

Оценку частотных свойств методом Рунге — Кутта рассмотрим применительно к СЧИ второго порядка, т. е.

$$\ddot{x}(t) = f(t),$$

далее запишем систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= f(t). \end{aligned}$$

Согласно схеме вычислений метода Рунге — Кутта, имеем

$$\begin{aligned} x_1(t_n) &= x_1(t_{n-1}) + (1/6)(\ell_1 + 2\ell_2 + 2\ell_3 + \ell_4); \\ x_2(t_n) &= x_2(t_{n-1}) + (1/6)(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_1 &= x_2(t_{n-1})\Delta t; \\ \ell_2 &= (x_2(t_{n-1}) + m_1/2)\Delta t; \\ \ell_3 &= (x_2(t_{n-1}) + m_2/2)\Delta t; \\ \ell_4 &= (x_2(t_{n-1}) + m_3)\Delta t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_{n-1})\Delta t; \\ m_2 &= f(t_{n-1} + \Delta t / 2)\Delta t; \\ m_3 &= f(t_{n-1} + \Delta t / 2)\Delta t; \\ m_4 &= f(t_{n-1} + \Delta t)\Delta t. \end{aligned}$$

Полагая $\Delta t / 2 = T_{kv}$ и используя приведенные определения, получаем:

$$\begin{aligned} x_1[k] &= x_1[k-2] + x_2[k-2]2T_{kv} + (f[k-2] + 2f[k-1])(2/3)T_{kv}^2; \\ x_2[k] &= x_2[k-2] + (f[k-2] + 4f[k-1] + f[k])(1/3)T_{kv}. \end{aligned}$$

Отметим, что приведенное определение $x^2[k]$ показывает, что СЧИ первого порядка по схеме Рунге — Кутта эквивалентно способу (1/3) Симпсона.

Подвергнув эти уравнения Z-преобразованию, запишем:

$$x_2(z) = \frac{(z^2 + 4z + 1)}{(z^2 - 1)} \cdot \frac{1}{3} T_{kv} f(z); \quad x_1(z) = \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z^2 - 1)^2} \cdot \frac{4}{3} T_{kv}^2 f(z).$$

Частотные характеристики обсуждаемых схем получим, используя подстановку (1):

$$W_{rk-1}(j\omega_c) = W_{(1/3)S}(j\omega_c); \quad W_{rk-2}(j\omega_c) = \left(\frac{1}{j\omega_c}\right)^2 \left(\frac{(2 \cos(\bar{\omega}) + 1)}{3}\right) \left(\frac{\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega})}\right)^2.$$

Частотные коэффициенты методической погрешности этих схем равны

$$(K_m(\bar{\omega}))_{rk-1} = 1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega})} \frac{(2 + \cos(\bar{\omega}))}{3}\right); \quad (K_m(\bar{\omega}))_{rk-2} = 1 - \left(\frac{(2 \cos(\bar{\omega}) + 1)}{3}\right) \left(\frac{\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega})}\right)^2,$$

а фазовые сдвиги отсутствуют.

При этом все частотные характеристики, согласно теореме Котельникова — Шеннона, рассматривались лишь от частоты Найквиста и ниже. Результаты расчета приведены на рис. 1.

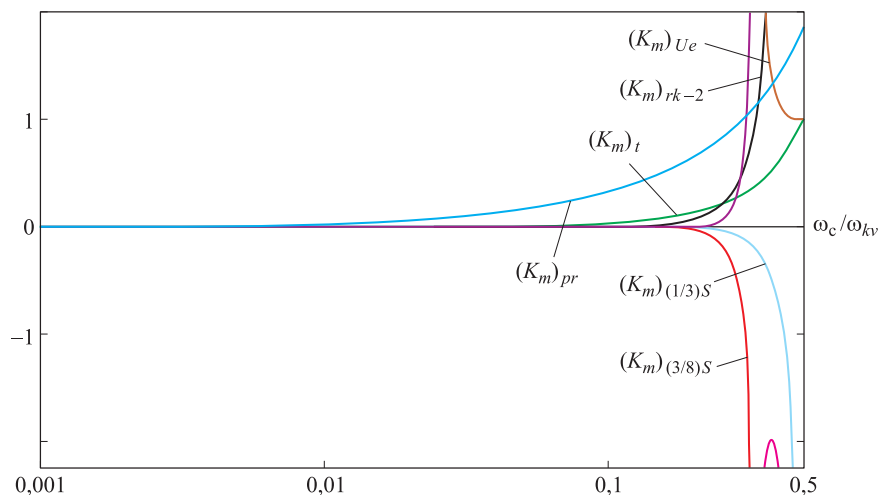


Рис. 1. Частотные коэффициенты методической погрешности СЧИ

Теперь обратимся к основной задаче настоящей работы: к анализу адекватности цифровой модели аналоговой линейной динамической системы. Здесь ограничимся методами прямоугольников (K_p), трапеций (K_t) и (1/3) Симпсона ($K_{S/3}$).

Для описания динамики рассматриваемой системы воспользуемся аппаратом передаточных функций. Пусть система имеет передаточную функцию [7]

$$W(p) = \frac{C(p)}{D(p)} = \frac{(c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2} + \dots + c_1p + c_0)}{(d_n p^n + d_{n-1}p^{n-1} + d_{n-2}p^{n-2} + \dots + d_1p + d_0)}, \quad (3)$$

где все c_i и d_i — вещественные коэффициенты.

Как известно, структурная схема такой системы может быть приведена к набору из усилительных, суммирующих и интегрирующих звеньев и благодаря этому реализована на СЧИ, если каждому аналоговому интегрирующему звену поставить в соответствие свою СЧИ. Полагаем, что в схеме используются СЧИ только одного типа. Передаточную функцию СЧИ, в общем случае имеющую вид (2), приведем к виду

$$W_{Sdi}(p) = (1/p)(1 + \delta),$$

где δ — коэффициент относительной методической ошибки СЧИ, ранее обозначенный как $K_m(j\omega)$. Обозначение δ принято для того, чтобы подчеркнуть его малую величину, так как иначе цифровая модель не может быть адекватной в принципе.

Аналоговый интегратор $(1/p)$ является обратным оператором по отношению к аналоговому дифференциатору (p) . По аналогии с этим примем, что дискретный интегратор является обратным по отношению к дискретному дифференциатору (СЧД)

$$W_{Sdd}(p) = \left(\frac{1}{W_{Sdi}(p)} \right) = \left(\frac{p}{1 + \delta} \right) = (p(1 + \varepsilon)),$$

где ε — коэффициент относительной методической погрешности СЧД и, очевидно, $(1 + \varepsilon) = 1/(1 + \delta)$.

Отметим, что для всех СЧИ, кроме метода прямоугольников, параметр ν равен нулю и, следовательно, коэффициент δ , а значит, и ε не имеет фазового сдвига. Это существенно упрощает анализ и расчет их частотных характеристик.

При частотном анализе передаточных функций цифровых моделей аналоговых динамических систем с передаточной функцией $W(p)$, реализуемой на интеграторах и усилителях, для перехода к описанию цифровой модели необходимо заменить идеальный аналоговый дифференциатор на образ дискретного дифференциатора, в результате получим частотную характеристику цифровой модели в виде $W(p(1 + \varepsilon))$, где $(1 + \varepsilon)$ определяется коэффициентом относительной методической погрешности СЧИ.

На основании изложенного имеем

$$(1 + \varepsilon) = (1 + j\nu) / \mu.$$

Для метода прямоугольников

$$\mu_{pr} = \left(\frac{\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega})} \right); \quad \nu_{pr} = \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\omega}}{2} \right).$$

Отсюда

$$1 + j\nu_{pr} = \left(\frac{1}{\cos(\bar{\omega}/2)} \right) e^{j(\bar{\omega}/2)};$$

$$1 + \varepsilon_{pr} = \left(\frac{1 + j\nu_{pr}}{\mu_{pr}} \right) = \left(\frac{\sin(\bar{\omega}/2)}{\bar{\omega}/2} \right) e^{j(\bar{\omega}/2)} = k_{pr} e^{j(\bar{\omega}/2)}.$$

Для всех остальных СЧИ $\nu = 0$, поэтому получим:

$$1 + \varepsilon_{\tau} = k_{\tau} = \frac{\operatorname{tg}(\bar{\omega}/2)}{\bar{\omega}/2}$$

— для метода трапеций;

$$1 + \varepsilon_{(1/3)S} = k_s = \left(\frac{\sin(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} \right) \left(\frac{3}{2 + \cos(\bar{\omega})} \right)$$

— для метода (1/3) Симпсона.

Учтем, что

$$\omega_{kv} = 2\pi / T_{kv}; \quad \omega_c = 2\pi / T_c; \quad \bar{\omega} = 2\pi / (T_{kv} / T_c).$$

Рассмотрим процедуру вычисления частотной характеристики знаменателя передаточной функции (для числителя она аналогична). Сначала обратимся к методу трапеций (для метода (1/3) Симпсона она аналогична). Знаменатель передаточной функции представим суммой вещественной и мнимой частей $D_{\tau}(j\omega) = D_{\operatorname{Re}\tau} + jD_{\operatorname{Im}\tau}$.

Здесь возможны два варианта:

1) $n = 2k$, тогда

$$D_{\operatorname{Re}\tau} = \sum_{i=0}^k d_{2i} k_{\tau}^{2i} \omega^{2i} (-1)^i; \quad D_{\operatorname{Im}\tau} = \sum_{i=1}^k d_{2i-1} k_{\tau}^{2i-1} \omega^{2i-1} (-1)^{i-1};$$

2) $n = 2k + 1$, тогда $D_{\operatorname{Re}\tau}$ вычисляется, как в первом случае, $D_{\operatorname{Im}\tau}$ вычисляется также, но при i , равном от 1 до $k + 1$. Напомним, что $(-1)^0 = 1$.

Числитель передаточной функции вычисляется аналогично, но в качестве величины n выступает $(n - 1)$:

$$C_{\tau}(j\omega) = C_{\operatorname{Re}\tau} + jC_{\operatorname{Im}\tau}.$$

$$W_{\tau}(j\omega) = \frac{C_{\operatorname{Re}\tau} + jC_{\operatorname{Im}\tau}}{D_{\operatorname{Re}\tau} + jD_{\operatorname{Im}\tau}} = \frac{(C_{\operatorname{Re}\tau}D_{\operatorname{Re}\tau} + C_{\operatorname{Im}\tau}D_{\operatorname{Im}\tau}) + j(C_{\operatorname{Im}\tau}D_{\operatorname{Re}\tau} - C_{\operatorname{Re}\tau}D_{\operatorname{Im}\tau})}{(D_{\operatorname{Re}\tau}^2 + D_{\operatorname{Im}\tau}^2)} =$$

$$= W_{\operatorname{Re}\tau}(\omega) + jW_{\operatorname{Im}\tau}(\omega).$$

При идеальном аналоговом интеграторе, полагая $k_{\tau} = 1$, найдем

$$W(j\omega) = W_{\operatorname{Re}}(\omega) + jW_{\operatorname{Im}}(\omega).$$

Коэффициент относительной методической погрешности модели определим так же, как для СЧИ:

$$\begin{aligned} & ((W(j\omega) - W_T(j\omega))/W(j\omega)) = N_T(j\omega) = \\ & = \{ [(W_{\text{Re}}(j\omega) - W_{\text{Re}T}(j\omega))W_{\text{Re}}(j\omega) + (W_{\text{Im}}(j\omega) - W_{\text{Im}T}(j\omega))W_{\text{Im}}(j\omega)] + \\ & \quad + j[(W_{\text{Im}}(j\omega) - W_{\text{Im}T}(j\omega))W_{\text{Re}}(j\omega) - \\ & \quad - (W_{\text{Re}}(j\omega) - W_{\text{Re}T}(j\omega))W_{\text{Im}}(j\omega)] \} / (W_{\text{Re}}^2(j\omega) - W_{\text{Im}}^2(j\omega)) = \\ & = N_{\text{Re}T}(\omega) + jN_{\text{Im}T}(\omega) = \sqrt{(N_{\text{Re}T}^2(\omega) + N_{\text{Im}T}^2(\omega))} e^{j \text{Arctg}(N_{\text{Im}T}(\omega)/N_{\text{Re}T}(\omega))} = \\ & = N_T(\omega) e^{j\varphi_T(\omega)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вычисление знаменателя передаточной функции при методе прямоугольников. В этом случае в формулах для метода трапеций коэффициент k_T^l следует заменить на

$$(k_{pr} e^{j(\bar{\omega}/2)})^\ell = (k_{pr})^\ell (\cos(\ell(\bar{\omega}/2)) + j \sin(\ell(\bar{\omega}/2)));$$

1) $n = 2k$

$$\begin{aligned} D_{\text{Re}p_-} &= \sum_{i=0}^k d_{2i} k_p^{2i} \omega^{2i} (\cos(2i(\bar{\omega}/2)) + j \sin(2i(\bar{\omega}/2))) (-1)^i = \\ &= \sum_{i=0}^k d_{2i} k_p^{2i} \omega^{2i} \cos(2i(\bar{\omega}/2)) (-1)^i + j \sum_{i=0}^k d_{2i} k_p^{2i} \omega^{2i} \sin(2i(\bar{\omega}/2)) (-1)^i = \\ &= D_{\text{Re}p_{\text{Re}}} + jD_{\text{Re}p_{\text{Im}}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\text{Im}p_-} &= \sum_{i=1}^k d_{2i-1} k_p^{2i-1} \omega^{2i-1} (\cos((2i-1)(\bar{\omega}/2)) + j \sin((2i-1)(\bar{\omega}/2))) (-1)^{i-1} = \\ &= \sum_{i=1}^k d_{2i-1} k_p^{2i-1} \omega^{2i-1} \cos((2i-1)(\bar{\omega}/2)) (-1)^{i-1} + \\ &+ j \sum_{i=1}^k d_{2i-1} k_p^{2i-1} \omega^{2i-1} \sin((2i-1)(\bar{\omega}/2)) (-1)^{i-1} = D_{\text{Im}p_{\text{Re}}} + jD_{\text{Im}p_{\text{Im}}}; \end{aligned}$$

2) $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} D_{\text{Re}p_-} &= \sum_{i=0}^k d_{2i} k_p^{2i} \omega^{2i} (\cos(2i(\bar{\omega}/2)) + j \sin(2i(\bar{\omega}/2))) (-1)^i = \\ &= \sum_{i=0}^k d_{2i} k_p^{2i} \omega^{2i} \cos(2i(\bar{\omega}/2)) (-1)^i + j \sum_{i=0}^k d_{2i} k_p^{2i} \omega^{2i} \sin(2i(\bar{\omega}/2)) (-1)^i = \\ &= D_{\text{Re}p_{\text{Re}}} + jD_{\text{Re}p_{\text{Im}}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\text{Im}p_-} &= \sum_{i=1}^{k+1} d_{2i-1} k_p^{2i-1} \omega^{2i-1} (\cos((2i-1)(\bar{\omega}/2)) + j \sin((2i-1)(\bar{\omega}/2))) (-1)^{i-1} = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} d_{2i-1} k_p^{2i-1} \omega^{2i-1} \cos((2i-1)(\bar{\omega}/2)) (-1)^{i-1} + \\ &+ j \sum_{i=1}^{k+1} d_{2i-1} k_p^{2i-1} \omega^{2i-1} \sin((2i-1)(\bar{\omega}/2)) (-1)^{i-1} = D_{\text{Im}p_{\text{Re}}} + jD_{\text{Im}p_{\text{Im}}}. \end{aligned}$$

Далее слагаемые выбираем в соответствии со значением n ($2k$ либо $2k + 1$):

$$D_{\text{Re } p}(j\omega) = D_{\text{Re } p \text{ Re}} - D_{\text{Im } p \text{ Im}}; \quad D_{\text{Im } p}(j\omega) = D_{\text{Re } p \text{ Im}} + D_{\text{Im } p \text{ Re}}; \quad D_p(j\omega) = D_{\text{Re } p} + jD_{\text{Im } p}.$$

Аналогично вычисляется $C_p(j\omega) = C_{\text{Re } p} + jC_{\text{Im } p}$.

Последующие вычисления эквивалентны методу трапеций. В результате находим коэффициент относительной погрешности модели $N_p(j\omega) = N_p(\omega)e^{j\varphi_p(\omega)}$.

Отметим, что для всех СЧИ $K_m = K_m(\bar{\omega})$, а для $W(\omega)$ запишем $N(j\omega) = N(j\omega; \bar{\omega})$.

Методика выбора параметров и анализа адекватности цифровой модели линейной динамической системы в общей форме представления. Представленные соотношения позволяют сформировать методику выбора параметров и анализа адекватности цифровой модели линейной динамической системы общего вида. Предполагаем рациональным следующий порядок выполнения анализа.

1. Находим «среднегеометрическую собственную частоту» колебаний моделируемой системы (3) [8]:

$$\Omega = \sqrt[n]{d_0 / d_n}. \quad (4)$$

2. Опыт разработки и использования высокоточных систем автоматического управления ЛА показывает, что их динамика, как правило, практически полностью определяется значением частотной характеристики системы в полосе существенных частот протяженностью в три декады. Можно принять, что указанная существенная полоса частот гарантированно попадает в полосу четырех декад частот с центром в «среднегеометрической частоте собственных колебаний» системы. Небольшие отклонения от данных значений, принимаемые при округлении опорных величин, особой роли не играют и легко корректируются по виду АЧХ. Итак, опираясь на указанные рекомендации, строим АЧХ исследуемой системы. На ее график наносим разметку в области малых значений.

3. Руководствуясь необходимостью недопущения эффекта «наложения частот» в цифровой модели системы (для обеспечения ее адекватности), по графику АЧХ находим частоту, начиная с которой АЧХ — меньше желаемого малого значения (0,01 и менее). Эту частоту принимаем за начальное значение частоты Найквиста модели рассматриваемой системы, а начальное значение частоты квантования принимается в 2 раза больше этой частоты.

4. В целях выявления частотных проблем функционирования цифровой модели системы строим АЧХ исследуемой системы и ее цифровых моделей, реализуемых с помощью различных схем СЧИ. Затем строим графики коэффициентов методической погрешности рассматриваемых моделей. Указанные графики наглядно покажут возможные проблемы функционирования модели и позволят проверить эти проблемы на модели и уточнить значения частоты квантования в зависимости от используемых схем СЧИ.

5. Решение об адекватности и приемлемости цифровой модели рассматриваемой системы следует принимать по результатам численного моделирования

установившейся реакции модели и исходной системы на входное гармоническое воздействие в диапазоне частот ожидаемых воздействий. При этом следует иметь в виду, что любая СЧИ предназначена для интегрирования по предписанному ей алгоритму поступающего на ее вход сигнала. В то же время поведение динамической системы описывается дифференциальными уравнениями. В связи с этим при непосредственной замене в структурной схеме системы аналоговых интеграторов блоками СЧИ будет иметь место запаздывание обратных связей, что исказит частотную характеристику цифровой модели.

С СЧИ по методу прямоугольников такой проблемы нет, но этот метод является самым грубым. При использовании метода трапеций указанная проблема существенно ухудшает качество модели, однако здесь без особых усложнений возможно использование алгоритма работы схемы с компенсацией запаздывания обратных связей. Как это делается, будет показано далее. С СЧИ более высокого порядка, Симпсона и Уэддла, компенсацию запаздывания обратных связей выполнить не удалось.

6. Структурная схема моделируемой динамической системы, имеющей передаточную функцию (3), может быть приведена к двум каноническим формам [9], описываемым:

- а) системой n дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши;
- б) последовательным соединением элементарных звеньев с последующим приведением звеньев второго порядка к форме Коши.

Первый вариант использует более глубокие обратные связи, при которых все компоненты введенного вектора состояния подаются на общий вход системы. Это обстоятельство заставляет оперировать с чрезмерно большими значениями коэффициентов многочлена знаменателя передаточной функции и усложняет динамику моделируемой системы.

Второй вариант ограничивается введением только локальных обратных связей в каждом элементарном звене, что освобождает от использования в структурной схеме и алгоритмах модели чрезмерно больших значений коэффициентов многочлена знаменателя передаточной функции и способствует более гармоничной работе всех элементов структурной схемы. При этом следует иметь в виду, что в процессе проектирования системы, как правило, определяется представление ее передаточной функции в виде последовательного соединения элементарных звеньев. Следовательно, эта процедура не является составной частью процесса моделирования и не нагружает его.

Приложение полученных результатов при анализе адекватности цифровых моделей аналоговых систем управления ЛА. Практику применимости предложенной методики и специфические особенности цифровых моделей динамических систем проиллюстрируем на примере канала управления высотой полета крылатой ракеты (КР). Для класса КР тактического назначения передаточная функция типичного канала управления высотой полета может быть записана в двух вариантах и принята примерно равной

$$W_h(p) = \frac{(c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0)}{(d_7 p^7 + d_6 p^6 + d_5 p^5 + d_4 p^4 + d_3 p^3 + d_2 p^2 + d_1 p + d_0)} =$$

$$= \left(\frac{(-\tau_k^2 p^2 - 2\eta_k \tau_k p + 1)}{(\tau_{B2}^2 p^2 + 2\xi_{B2} \tau_{B2} p + 1)} \right) \left(\frac{(T_{p.B} p + 1)}{(\tau_B^2 p^2 + 2\eta_B \tau_B p + 1)} \right) \left(\frac{1}{(\tau_{B1} p + 1)} \right) \left(\frac{1}{(T_{B1} p + 1)} \right) \left(\frac{(T_{и} p + 1)}{(T_B p + 1)} \right). \quad (5)$$

Первый вариант записи $W_h(p)$ отображает описание канала скалярным обыкновенным дифференциальным уравнением 7-го порядка (будем обозначать его $SpDr$), второй вариант записи $W_h(p)$ представляет канал последовательным соединением элементарных звеньев (будем обозначать его $PSEZv$).

Для выполнения моделирования описание канала приводится к системе уравнений первого порядка в форме Коши. При этом описание варианта $SpDr$ имеет вид [10]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & -d_5 & -d_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix} f(t). \quad (6)$$

Коэффициенты b_i определяются [10] по формулам:

$$\begin{cases} b_1 = c_{n-1}; \\ d_{n-1} b_1 + b_2 = c_{n-2}; \\ \dots\dots\dots \\ d_1 b_1 + d_2 b_2 + \dots + d_{n-1} b_{n-1} + b_n = c_0. \end{cases}$$

Главная особенность этого варианта — большой диапазон значений коэффициентов и глубокие обратные связи. Описание варианта $PSEZv$ разбивается на последовательное подключение элементарных звеньев, каждое из которых описывается аналогично (6), но имеет размерность 1 или 2 в соответствии с порядком рассматриваемого звена. В этом случае значения коэффициентов уравнений занимают небольшой диапазон, а обратные связи динамически близки.

В рассматриваемом случае имеем:

$$T_{и} = 5 \text{ с}; T_{p.B} = 0,1 \text{ с}; \tau_k = 0,0422 \text{ с}; \eta_k = 0,086; T_B = 4,4 \text{ с};$$

$$T_{B1} = 0,360 \text{ с}; \tau_{B1} = 0,360 \text{ с};$$

$$\tau_{B2} = 0,175 \text{ с}; \xi_{B2} = 0,416; \tau_B = 0,061 \text{ с}; \eta_B = 0,344;$$

$$d_7 = 1,000000000000E + 000; d_6 = 4,077715517871E + 001;$$

$$d_5 = 8,177014435790E + 002; d_4 = 1,150189146773E + 004;$$

$$\begin{aligned}
 d_3 &= 7,314025929716E + 004; \\
 d_2 &= 3,305770829126E + 005; d_1 = 6,013982941978E + 005; \\
 d_0 &= 1,204345858908E + 005; \\
 c_4 &= -1,072373639689E + 002; c_3 = -1,530902311598E + 003; \\
 c_2 &= 5,554458998651E + 004; c_1 = 6,133422256451E + 005; \\
 c_0 &= 1,204345858908E + 005; \\
 b_1 &= 0; b_2 = 0; b_3 = -1,072373639689E + 002; b_4 = 2,841932319918E + 003; \\
 b_5 &= 2,734682209280E + 004; b_6 = -1,592203021373E + 006; \\
 b_7 &= 1,784017986653E + 007.
 \end{aligned}$$

Размерность коэффициентов d_i и c_i определяется по (5).

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение канала $W_h(p)$ в варианте PSEZv, принимает вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_7(t) &= -k_5 x_7(t) + k_6 f(t); \\
 \dot{x}_6(t) &= -k_3 x_6(t) + k_3 x_7(t) + k_4 f(t); \\
 \dot{x}_5(t) &= -k_2 x_5(t) + k_2 x_6(t); \\
 \dot{x}_4(t) &= -k_{d02} x_3(t) + k_{d12} x_4(t) + k_{b12} x_5(t); \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) + k_{c12} x_5(t); \\
 \dot{x}_2(t) &= -k_{d0} x_1(t) - k_{d1} x_2(t) + k_{b1} x_3(t); \\
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + k_{c1} x_3(t); \\
 z(t) &= x_1(t) - k_1 x_3(t).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты системы (7) определяются зависимостями:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (\tau_k^2 / \tau_{B2}^2); k_2 = (1 / \tau_{B1}); k_3 = (1 / T_{B1}); k_4 = (1 / T_{B1})(T_H / T_B); \\
 k_5 &= (1 / T_{B1}); k_6 = ((1 - (T_H / T_B)) / T_B); \\
 k_{c0} &= (((\tau_k^2 / \tau_{B2}^2) + 1) / \tau_{B2}^2); k_{c1} = (((\tau_k^2 / \tau_{B2}^2) \cdot 2\xi_{B2} \tau_{B2} - 2\eta_k \tau_k) / \tau_{B2}^2); \\
 k_{d0} &= (1 / \tau_{B2}^2); k_{d1} = (2\xi_{B2} / \tau_{B2}); k_{b1} = k_{c0} - k_{d1} k_{c1}; k_{c02} = (1 / \tau_B^2); \\
 k_{c12} &= (T_{P.B} / \tau_B^2); k_{d12} = (2\eta_B / \tau_B); k_{b12} = k_{c02} - k_{d12} k_{c12}.
 \end{aligned}$$

При данных параметрах «среднегеометрическая собственная частота» колебаний канала, согласно (4), равна $\Omega = 5,318898 \text{ с}^{-1}$. Учитывая ориентировочное значение этого параметра и рассматривая АЧХ $W_h(\omega)$ в полосе четырех декад со средним значением частоты, равным 1 с^{-1} , определим, что, начиная с частоты $\omega = 35 \text{ с}^{-1}$, АЧХ канала менее 0,004. Этот факт с позиций ограничения наложения частот в цифровой модели канала позволяет принять для данного канала частоту Найквиста ω_N равной 35 с^{-1} и, следовательно, частоту квантования ω_k , равной 70 с^{-1} .

Было исследовано влияние частоты квантования цифровой модели на АЧХ и коэффициент методической погрешности цифровой модели, построенной с использованием СЧИ по методу прямоугольников, трапеций и (1/3) Симпсона. Для иллюстрации результатов на рис. 2 приведены графики АЧХ, а на рис. 3 — графики коэффициента методической погрешности.

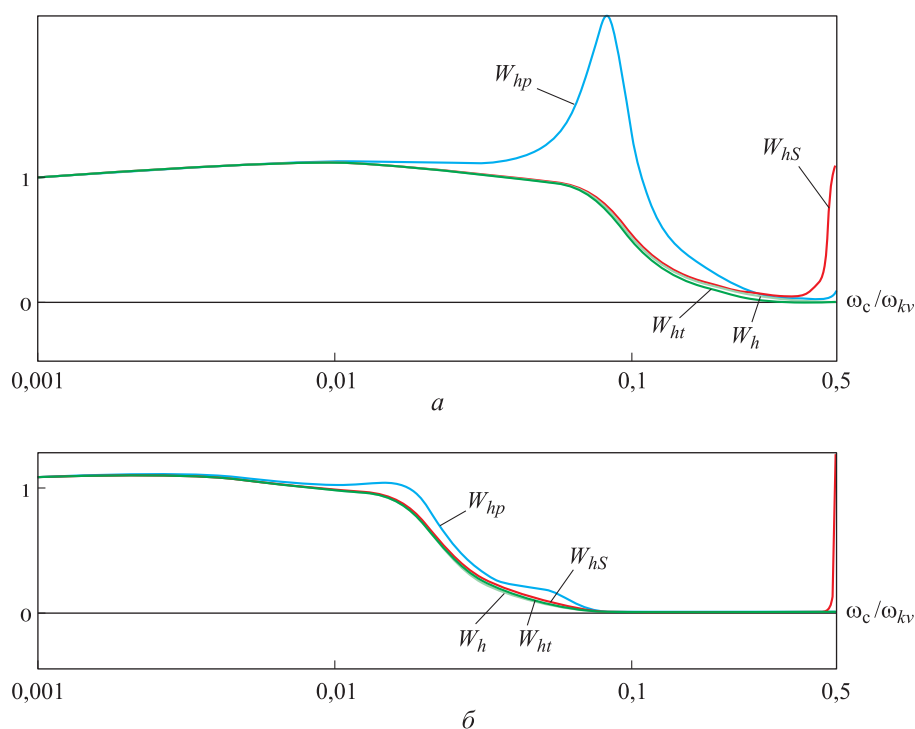


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики канала $W_h(\omega)$ и его дискретных моделей W_h , W_{hp} , W_{ht} , W_{hs} при $\omega_{kv} = 70$ (а) и 300 (б)

Приведенные графики наглядно показывают, что помимо эффекта наложения частот, искажающего собственную динамику модели, возможно существенное искажение частотной характеристики в диапазоне частот ниже частоты Найквиста из-за частотных характеристик блоков СЧИ (см. рис. 1). Поэтому становится очевидной необходимость проверки адекватности цифровой модели в полосе частот ожидаемого полезного сигнала методом численного моделирования функционирования цифровой модели. В то же время из рис. 2 и 3 следуют проблемные условия адекватного поведения цифровой модели, в том числе и в отношении помех. Эти условия, если они реально ожидаемы, должны быть проверены.

Поскольку непосредственное интегрирование системы дифференциальных уравнений с помощью блоков СЧИ может сопровождаться запаздыванием обратных связей, что существенно ухудшает прямое использование алгоритма метода трапеций, предложен вариант программирования с компенсацией данного

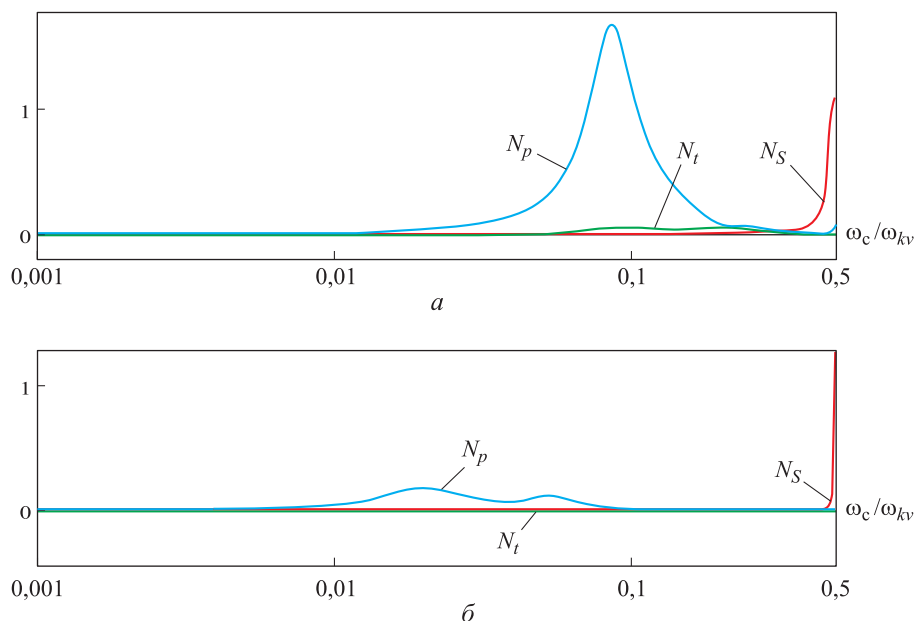


Рис. 3. Коэффициенты методической погрешности $N(\omega)$ дискретных моделей канала $W_h(\omega)$ (N_p, N_t, N_S) при $\omega_{kv} = 70$ (а) и 300 (б)

явления. Покажем это на примере уравнения для $\dot{x}_7(t)$ варианта PSEZv. При прямом использовании алгоритма метода трапеций данное уравнение принимает вид

$$x_7[3] = x_7[1] + ((-k_5(x_7[1] + x_7[2]) + k_6(f[1] + f[2]))(T/2)). \quad (8)$$

Здесь $x_7[3]$ — обновляемое в данном такте интегрирования значение координаты $x_7[n]$, а $x_7[1]$ и $x_7[2]$ — вычисленные в предшествующих тактах два последних значения $x_7[n]$; $f[1]$ и $f[2]$ — значения внешнего воздействия в данном и предыдущем тактах. Чтобы устранить запаздывание входной величины СЧИ $\dot{x}_7(t)$, в правой части первого уравнения (7) должно быть использовано значение этой координаты, которое получается в конце данного такта интегрирования, для этого перепишем уравнение (8) в виде

$$x_7[3] = x_7[1] + ((-k_5(x_7[3] + x_7[1]) + k_6(f[1] + f[2]))(T/2)).$$

Это выражение позволяет перед операцией интегрирования определить

$$x_7[3] = (x_7[1] + (-k_5 x_7[1] + k_6(f[1] + f[2]))(T/2)) / (1 + k_5(T/2)),$$

а затем вычислить, используя известные значения всех переменных его правой части. В результате явление запаздывания при интегрировании правой части этого уравнения будет устранено. В завершение такта интегрирования производится сдвиг значений переменных интегрирования:

$$x_7[2] = x_7[1]; \quad x_7[1] = x_7[3].$$

В соответствии с изложенным проведен ряд экспериментов по цифровому моделированию канала $W_h(p)$, в процессе которых на вход исследуемой цифровой модели подавался синусоидальный сигнал заданной частоты с единичной амплитудой. Поскольку установившейся реакцией линейной динамической системы на гармоническое воздействие является гармоника той же частоты, но с измененной амплитудой и сдвигом по фазе, определяемыми значениями частотной характеристики на частоте входного сигнала, то качество работы модели контролировалось выводом на экран реакции аналогового канала, рассчитанной по частотной характеристике, и процессом работы его цифровой модели. Условиями запуска каждого эксперимента назначались частота квантования входного сигнала ω_{kv} и отношение x частоты квантования к частоте входного сигнала. Типичные результаты проведенных экспериментов приведены на рис. 4, где обозначено: T_n — время прогона модели (1 пиксел соответствует 1 периоду квантования); AmSid — выход аналогового канала; AmS — выход цифровой модели канала; $delA$ — относительное отклонение амплитуды AmS от амплитуды AmSid; df_i — сдвиг по фазе AmS относительно AmSid.

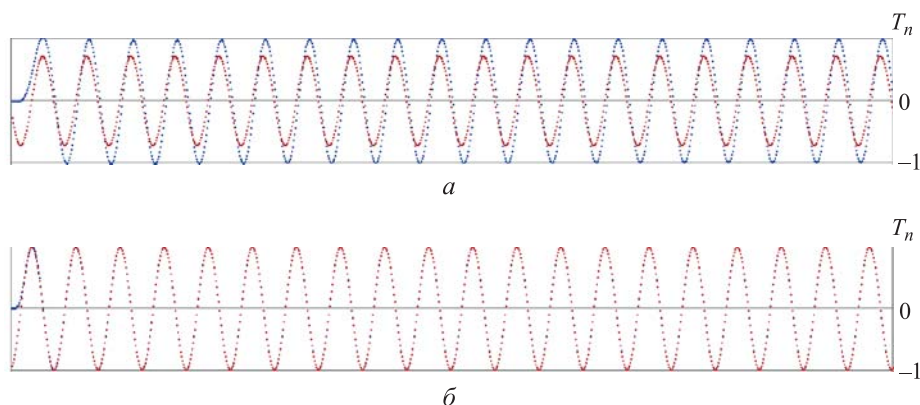


Рис. 4. Графики реакций AmSid (выход аналогового сигнала) канала $W_h(p)$ и AmS (выход цифровой модели канала) дискретных моделей:

в варианте ТрапСрДр при $\omega_{kv} = 300$, $x = 50$ (а), $delA = 0,386$, $df_i = 19,2^\circ$; в варианте ТрапPSEZvKZ при $\omega_{kv} = 150$, $x = 50$ (б), $delA = -0,009$, $df_i = 2,9^\circ$

Результаты моделирования показали следующее:

- вариант ПрямоСрДр (способ прямоугольников (6) $W_h(p)$) имеет затяжной переходный процесс, работает при высоких ω_{kv} и с большой ошибкой;
- вариант ПрямоPSEZv (способ прямоугольников (7) $W_h(p)$) имеет очень короткий переходный процесс, работоспособен с умеренных ω_{kv} , ошибки малы;
- вариант ТрапСрДр (способ трапеций (6) $W_h(p)$) — на частотах $\omega_{kv} \leq 210$ наблюдается расходимость, далее устойчив с коротким переходным процессом, ошибки достаточно большие, приближаются к приемлемым с $\omega_{kv} \geq 300$;

– вариант TrapPSEZv (способ трапеций без компенсации запаздывания обратных связей (7) $W_h(p)$) — на частотах $\omega_{kv} \leq 165$ также наблюдается расходимость, далее устойчив с коротким переходным процессом, по качеству близок к PrgamPSEZv, может быть чуть хуже из-за большего влияния запаздывания;

– вариант TrapPSEZvKZ (способ трапеций с компенсацией запаздывания обратных связей (7) $W_h(p)$) — практически без переходного процесса, расходимость не наблюдалась, всюду устойчив, по качеству — лучший из рассмотренных, качество отличное, функционирует на ω_{kv} в 5 раз ниже указанной частоты Найквиста, ошибки 10...20 %.

Выводы. 1. Рассмотрено и оценено влияние квантования данных по времени в системах и устройствах цифровой обработки сигналов и его связь с теоремой Котельникова — Шеннона.

2. В качестве показателя адекватности СЧИ предложен и определен частотный коэффициент относительной методической погрешности СЧИ, непосредственно характеризующий точность функционирования СЧИ.

3. Предложена методика анализа показателя качества и оценки адекватности и настройки цифровых моделей линейных динамических систем и разработаны ее теоретические основы. Методика позволяет выявить возможные проблемы функционирования цифровой модели при воздействии полезных сигналов и помех и тем самым обеспечивает достоверность работоспособной схемы построения и настройки цифровой модели.

4. Предложен алгоритмический метод компенсации запаздывания обратных связей цифровых моделей динамических систем, существенно повышающий точность и достоверность результатов моделирования.

5. На примере канала управления высотой полета КР выполнен сравнительный анализ работоспособности, точности и настройки функционирования цифровой модели системы управления ЛА при использовании различных схем численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Физматгиз, 1962. 236 с.
2. Победоносцев В.А. Определение количества информации о непрерывных сигналах. Элементарная теория. М.: Радиотехника, 2017. 168 с.
3. Карabanов В.А., ред. Частотные методы в автоматике. М.: ИИЛ, 1957. 490 с.
4. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958. 724 с.
5. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 968 с.
6. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 560 с.
7. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 484 с.
8. Красовский А.А., Поспелов Г.С. Основы автоматки и технической кибернетики. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1962. 656 с.
9. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М.: Наука, 1970. 704 с.
10. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.

Анцев Георгий Владимирович — канд. техн. наук, генеральный директор–генеральный конструктор АО «НПП «Радар ммс» (Российская Федерация, 197375, Санкт-Петербург, ул. Новосельковская, д. 37); генеральный директор–генеральный конструктор АО «Концерн «Моринформсистема-Агат» (Российская Федерация, 105275, Москва, ш. Энтузиастов, д. 29).

Лысенко Лев Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Петров Виктор Алексеевич — д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник АО «НПП «Радар ммс» (Российская Федерация, 197375, Санкт-Петербург, ул. Новосельковская, д. 37).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Анцев Г.В., Лысенко Л.Н., Петров В.А. Анализ адекватности цифровых моделей аналоговых систем управления летательных аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2018. № 6. С. 4–21. DOI: 10.18698/0236-3933-2018-6-4-21

ANALYSIS OF ADEQUACY OF DIGITAL MODELS OF ANALOG CONTROL SYSTEMS OF AIRCRAFT

G.V. Antsev^{1,2}

L.N. Lysenko³

V.A. Petrov¹

ancevgv@radar-mms.local

sm3@sm.bmstu.ru

¹JSC "Scientific-production enterprise "Radar mms", St. Petersburg, Russian Federation

²JSC "Concern "Morinformsystem-Agat", Moscow, Russian Federation

³Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article focuses on the analysis of digital model of analog linear dynamical system based on assessment of influence of data quantization in devices for digital signal processing and its correlation with Kotelnikov — Shannon theorem. The analysis is oriented on considering of the influence of slight factors, such as superposition of high frequencies, maintenance of acceptable phase shift of the control signals and required frequency transfer coefficients of the system and its elements. Frequency coefficient of relative methodical error of the discrete system was used as the criteria of estimating the model's adequacy. Additionally, this coefficient indicates reliability and accuracy of modeling process in total. Theoretical basis of general approach was illustrated via method of parameters' choice and analysis of adequacy of the digital model of the canal for altitude control for tactical cruise missile

Keywords

Dynamical system, digital and analog models, adequacy, frequency characteristics, methodical errors, delay of the response signal

Received 19.04.2018

© BMSTU, 2018

REFERENCES

- [1] Kharkevich A.A. *Spektry i analiz* [Spectrum and analysis]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 236 p.
- [2] Pobedonostsev V.A. *Opreделение kolichestva informatsii o nepreryvnykh signalakh. Elementarnaya teoriya* [Determination of information quality about continuous signal]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2017. 168 p.
- [3] Karabanov V.A., ed. *Chastotnye metody v avtomatike* [Frequency methods in automatics]. Moscow, IIL Publ., 1957. 490 p.
- [4] Tsypkin Ya.Z. *Teoriya impul'snykh system* [Pulse system theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 724 p.
- [5] Tsypkin Ya.Z. *Teoriya lineynykh impul'snykh system* [Linear pulse system theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 968 p.
- [6] Tsypkin Ya.Z. *Osnovy teorii avtomaticheskikh system* [Fundamentals of automatic system theory]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 560 p.
- [7] Kwakernaak H., Sivan R. *Linear optimal control systems*. Wiley-Interscience, 1972. 608 p.
- [8] Krasovskiy A.A., Pospelov G.S. *Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoy kibernetiki* [Fundamentals of automatics and technical cybernetics]. Moscow, Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1962. 656 p.
- [9] Zadeh L.A., Desoer Ch.A. *Linear system theory: the state space approach*. McGraw-Hill, 1963. 628 p.
- [10] Pervozvanskiy A.A. *Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control system theory]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 616 p.

Antsev G.V. — Cand. Sc. (Eng.), General Director–Chief Designer, JSC "Scientific-production enterprise "Radar mms" (Novoselkovskaya ul. 37, St. Petersburg, 197375 Russian Federation); General Director–Chief Designer, JSC "Concern "Morinformsystem-Agat" (Entuziastov shosse 29, Moscow, 10527 Russian Federation).

Lysenko L.N. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Petrov V.A. — Dr. Sc. (Eng.). Professor, Chief Research Fellow, JSC "Scientific-production enterprise "Radar mms" (Novoselkovskaya ul. 37, St. Petersburg, 197375 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Antsev G.V., Lysenko L.N., Petrov V.A. Analysis of Adequacy of Digital Models of Analog Control Systems of Aircraft. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2018, no. 6, pp. 4–21 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3933-2018-6-4-21