

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ УВЕЛИЧЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ В РЕЗУЛЬТАТЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А.П. Савенков

savencow@yandex.ru

ТГТУ, Тамбов, Российская Федерация

---

### Аннотация

На основе методов расчета погрешностей косвенных измерений получены критерии обусловленности систем линейных алгебраических уравнений для анализа точности методов измерений физических величин. Рассмотрена методика получения критериев на примере системы двух линейных алгебраических уравнений. Представлены результаты анализа бесконтактных аэродинамических методов одновременных измерений плотности и поверхностного натяжения жидкостей с использованием полученных критериев

### Ключевые слова

Измерение, критерий, обусловленность, поверхностное натяжение, погрешность, система уравнений

Поступила 29.05.2018

© Автор(ы), 2019

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках соглашения № 14.577.21.0214 (уникальный идентификатор проекта RFMEFI57716X0214)*

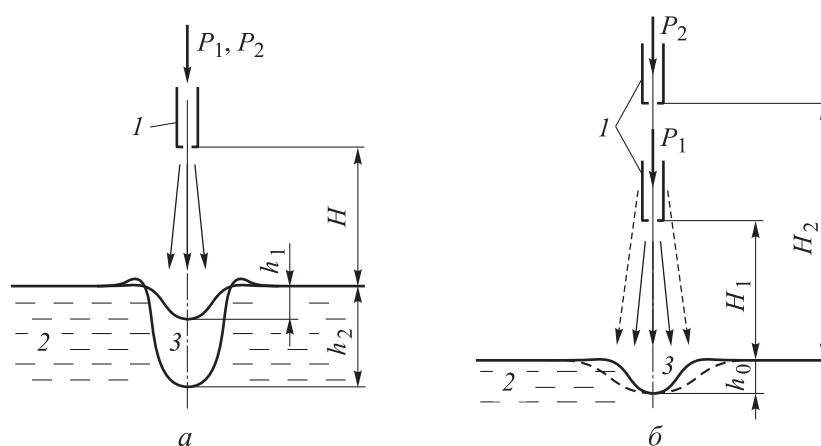
**Введение.** В практической метрологии нередко возникают случаи, когда искомые физические величины определяются на основе решения системы уравнений, полученной по результатам прямых измерений других величин. Речь не идет о совокупных измерениях, где в систему уравнений входят одноименные величины, а погрешность измерения может быть легко определена [1]. В общем случае в систему входят произвольные уравнения, составленные из величин с различными единицами измерения и коэффициентами.

Оценка погрешностей измерений при решении системы уравнений представляет собой важную и непростую задачу. Если решаемая система плохо обусловлена, то относительные погрешности определения искомых величин могут на несколько порядков превышать относительные погрешности прямых измерений. В случае хорошо обусловленной системы эти погрешности отличаются незначительно.

Известно, что критерии обусловленности систем алгебраических уравнений, используемые в линейной алгебре, несовершенны [2]. Их нецелесообразно применять для систем уравнений, составленных из величин с различной размерностью.

В настоящей работе предложена методика и критерии оценки обусловленности систем уравнений, в основу которых положены методы расчета погрешностей косвенных измерений. Оценка увеличения погрешности измерения в результате решения системы уравнений рассмотрена на примере анализа бесконтактных аэродинамических методов одновременных измерений плотности и поверхностного натяжения жидкостей.

**Аэродинамические методы измерений свойств жидкостей.** Струя газа, направленная на поверхность жидкости, формирует на ней углубление (рис. 1). При постоянной скорости газа в струе размеры углубления в основном определяются плотностью  $\rho$  и поверхностным натяжением  $\sigma$  жидкости. В динамическом режиме при изменении скорости газа значительное влияние на форму и размеры углубления оказывает вязкость жидкости. Определение физических свойств жидкости по геометрическим параметрам углубления и закономерностям их изменения во времени является основой методов измерений плотности, поверхностного натяжения и вязкости [3–8].



**Рис. 1.** Схемы получения двух уравнений баланса сил путем изменения давления  $P$  (а) и расстояния  $H$  (б):

1 — струйная трубка с отверстием истечения; 2 — жидкость; 3 — углубление

Силе  $F$  действия газовой струи на поверхность жидкости противодействуют выталкивающая сила  $F_p$  и сила поверхностного натяжения  $F_\sigma$ . Уравнение баланса сил на поверхности раздела фаз имеет вид

$$F = F_p + F_\sigma. \quad (1)$$

Одновременное соизмеримое влияние плотности и поверхностного натяжения жидкости на форму и размеры углубления, формируемого струей газа, затрудняет их раздельное измерение [3, 9–12]. Один из путей преодоления этой проблемы — решение системы двух уравнений баланса сил, полученных для различных форм углубления.

Входными величинами двухфазной системы струя газа–жидкость являются давление  $P$  перед отверстием истечения струи и расстояние  $H$  от него до поверхности жидкости (см. рис. 1). Получить систему из двух уравнений баланса сил можно путем варьирования одного из этих параметров или их одновременным изменением.

При постоянном расстоянии  $H$  целесообразно определять давления  $P_1$  и  $P_2$ , соответствующие двум заданным значениям  $h_1$  и  $h_2$  высоты углубления, а не наоборот. Первый подход отличается постоянством формы и размеров углубления при изменении свойств жидкости и упрощением определения степени деформации поверхности жидкости.

Варьирование расстояния  $H$  позволяет в наибольшей степени изменять отношение сил  $F_p / F_\sigma$ , так как одновременно существенно изменяются высота и радиус углубления. При уменьшении расстояния  $H$  высота увеличивается, а радиус уменьшается (рис. 1, б).

Изменение расстояния  $H$  при постоянном давлении  $P$  позволяет получить два значения  $H_1$  и  $H_2$ , соответствующие двум заданным значениям  $h_1$  и  $h_2$  высоты углубления. В этом случае  $H_1$  и  $H_2$  — переменные величины, зависящие от свойств контролируемой жидкости. Получение системы уравнений таким способом нецелесообразно, так как формы углублений, соответствующих заданным значениям  $h_1$  и  $h_2$  высоты углубления, зависят от значений  $H_1$  и  $H_2$ . В этом случае задание величин  $h_1$  и  $h_2$  не дает желаемого результата — стабилизации форм углубления при изменении свойств контролируемой жидкости. Расстояние  $H$  следует варьировать на двух фиксированных уровнях.

Вариант реализации варьирования расстояния  $H$  на двух фиксированных уровнях  $H_1$  и  $H_2$  с постоянным значением давления  $P$  рассматривать нет необходимости, так как в этом случае при изменении свойств жидкости будут изменяться значения  $h_1$  и  $h_2$ . По сути, этот вариант аналогичен измерению свойств жидкостей по значениям  $h_1$  и  $h_2$  при постоянных давлениях  $P_1$  и  $P_2$ .

Наиболее перспективен вариант получения двух уравнений баланса сил путем одновременного изменения расстояния  $H$  и давления  $P$ . В этом случае появляется возможность задания одного фиксированного значения  $h_0$  высоты углубления (см. рис. 1, б). Расстояние  $H$  варьируется на двух фиксированных уровнях  $H_1$  и  $H_2$ , а давление  $P$  в обоих случаях изменяется так, чтобы обеспечить равенство высоты углубления заданному значению  $h_0$ . Этому значению высоты соответствуют две различные формы углубления, которые слабо меняются при изменении свойств контролируемой жидкости. Измеряемые величины  $\rho$  и  $\sigma$  вычисляются по давлениям  $P_1$  и  $P_2$ , соответствующим  $H_1$  и  $H_2$ .

При изменении формы углубления меняются значения его объема  $V$  и специфического геометрического параметра  $m_\sigma$ , которые определяют соответствующие силы  $F_\rho$  и  $F_\sigma$ . Параметр  $m_\sigma$  представляет собой максимум произведения длины окружности горизонтального сечения углубления и синуса угла между касательной к образующей углубления и горизонталью [13]. Для двух форм углубления на поверхности жидкости на основе уравнения баланса сил (1) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} F_1 &= \rho g V_1 + \sigma m_{\sigma 1}; \\ F_2 &= \rho g V_2 + \sigma m_{\sigma 2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения; индексы «1» и «2» соответствуют различным формам углубления. В результате решения системы (1) относительно переменных  $\rho$  и  $\sigma$  получим:

$$\rho = \frac{1}{g} \frac{m_{\sigma 2} F_1 - m_{\sigma 1} F_2}{V_1 m_{\sigma 2} - V_2 m_{\sigma 1}}; \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{V_1 F_2 - V_2 F_1}{V_1 m_{\sigma 2} - V_2 m_{\sigma 1}}. \quad (4)$$

В связи с тем, что в систему уравнений (2) входят неоднородные величины, такие измерения не могут быть названы совокупными [1]. Поэтому в настоящей работе измерения названы «одновременными».

**Обусловленности системы уравнений баланса сил.** Оценку погрешностей вычисления величин  $\rho$  и  $\sigma$  по формулам (3) и (4) проведем методом логарифмирования и дифференцирования с заменой переменных, когда для операций сложения и вычитания применяют статистическое суммирование абсолютных погрешностей, а для операций умножения и

деления — относительных. Такой метод дает завышенную оценку погрешностей косвенных измерений по сравнению с методом непосредственного дифференцирования, однако существенно упрощает расчеты.

При выводе формул для расчета погрешностей косвенных измерений примем, что относительные погрешности измерений каждой величины  $F_1, F_2, V_1, V_2, m_{\sigma 1}$  и  $m_{\sigma 2}$  в системе (2) равны  $\delta$ . Это позволяет получить оценку влияния обусловленности системы (2) на результирующую погрешность измерения величин  $\rho$  и  $\sigma$  без учета погрешностей прямых измерений величин  $F_1, F_2, V_1, V_2, m_{\sigma 1}, m_{\sigma 2}$ . Применяя выбранный метод определения погрешностей косвенных измерений к формулам (3) и (4) и пренебрегая погрешностью определения ускорения  $g$  свободного падения, получаем выражения для относительных погрешностей измерения плотности и поверхностного натяжения:

$$\delta_{\rho} = \sqrt{2}\delta \sqrt{\frac{m_{\sigma 2}^2 F_1^2 + m_{\sigma 1}^2 F_2^2}{(m_{\sigma 2} F_1 - m_{\sigma 1} F_2)^2} + \frac{m_{\sigma 2}^2 V_1^2 + m_{\sigma 1}^2 V_2^2}{(m_{\sigma 2} V_1 - m_{\sigma 1} V_2)^2}}; \quad (5)$$

$$\delta_{\sigma} = \sqrt{2}\delta \sqrt{\frac{V_1^2 F_2^2 + V_2^2 F_1^2}{(V_1 F_2 - V_2 F_1)^2} + \frac{m_{\sigma 2}^2 V_1^2 + m_{\sigma 1}^2 V_2^2}{(m_{\sigma 2} V_1 - m_{\sigma 1} V_2)^2}}. \quad (6)$$

Проанализируем выражение (6). Абсолютную обусловленность система (2) приобретает, например, при равенстве объема  $V_1$  нулю. В этом случае поверхностное натяжение вычисляется из первого уравнения системы (2) по формуле  $\sigma = F_1 / m_{\sigma 1}$ , а относительная погрешность — по  $\delta_{\sigma} = \sqrt{2}\delta$ . При этом по формуле (6) для  $V_1 = 0$  получим  $\delta_{\sigma} = 2\delta$ . Следовательно, результаты расчета по формулам (5) и (6) завышены в  $\sqrt{2}$  раза.

В процессе анализа обусловленности системы (2) также были проведены расчеты методом непосредственного дифференцирования. При  $\delta_{\rho} / \delta < 5$  и  $\delta_{\sigma} / \delta < 5$  значения  $\delta_{\rho}$  и  $\delta_{\sigma}$ , полученные по формулам (5) и (6), превышают результаты расчетов методом непосредственного дифференцирования в среднем в 1,35 раза.

Исходя из результатов анализа выражений (5) и (6) целесообразно исключить из них коэффициент  $\sqrt{2}$ . При этом абсолютно обусловленной системе будет соответствовать соотношение  $\delta_{\sigma} = \sqrt{2}\delta$ , что неудобно для практического использования. Поэтому для оценки обусловленности системы уравнений (2) введем величины

$$\zeta_{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_{\sigma 2}^2 F_1^2 + m_{\sigma 1}^2 F_2^2}{(m_{\sigma 2} F_1 - m_{\sigma 1} F_2)^2} + \frac{m_{\sigma 2}^2 V_1^2 + m_{\sigma 1}^2 V_2^2}{(m_{\sigma 2} V_1 - m_{\sigma 1} V_2)^2}}; \quad (7)$$

$$\zeta_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{V_1^2 F_2^2 + V_2^2 F_1^2}{(V_1 F_2 - V_2 F_1)^2} + \frac{m_{\sigma 2}^2 V_1^2 + m_{\sigma 1}^2 V_2^2}{(m_{\sigma 2} V_1 - m_{\sigma 1} V_2)^2}}. \quad (8)$$

Величины  $\zeta_{\rho}$  и  $\zeta_{\sigma}$  позволяют определить, во сколько раз возрастает погрешность измерения величин  $\rho$  и  $\sigma$  относительно погрешности  $\delta$  прямых измерений в результате плохой обусловленности системы уравнений (2). Если система абсолютно обусловлена, то  $\zeta_{\rho} = 1$  или  $\zeta_{\sigma} = 1$ . Чем больше значения этих коэффициентов, тем хуже обусловлена система. В таком виде величины  $\zeta_{\rho}$  и  $\zeta_{\sigma}$  наиболее близки по смыслу к числу обусловленности, используемому в линейной алгебре.

С использованием выражений (7) и (8) и экспериментальных данных проведена проверка обусловленности системы (2) для двух методов одновременных измерений плотности и поверхностного натяжения жидкостей.

**Исследование обусловленности системы уравнений баланса сил при изменении давления.** Метод одновременных измерений поверхностного натяжения и плотности жидкости, основанный на решении системы уравнений баланса сил, полученных путем изменения давления  $P$  перед отверстием истечения газовой струи, заключается в следующем. При постоянном расстоянии  $H$  увеличивают давление  $P$  от нуля до значения  $P_1$ , при котором высота углубления становится равной заданному значению  $h_1$  (см. рис. 1, а). Увеличивают давление  $P$  до значения  $P_2$ , при котором высота углубления становится равной заданному значению  $h_2$ . Полученные значения давлений  $P_1$  и  $P_2$  используют для определения сил  $F_1$  и  $F_2$ , входящих в формулы (3) и (4) для расчета измеряемых величин  $\rho$  и  $\sigma$  [14]. Величины  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $m_{\sigma 1}$ ,  $m_{\sigma 2}$  в этих формулах являются константами и определяются экспериментально для соответствующих заданных значений  $h_1$  и  $h_2$  высоты углубления.

Результаты проверки обусловленности системы уравнений баланса сил для рассматриваемого метода с использованием формул (7) и (8) приведены в табл. 1. Для расчета величин  $\zeta_{\rho}$  и  $\zeta_{\sigma}$  использованы экспериментальные значения величин  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $m_{\sigma 1}$ ,  $m_{\sigma 2}$  полученные для различных жидкостей при разных значениях расстояния  $H$ . Определение форм образующих углублений и расчет параметров  $V$  и  $m_{\sigma}$  проведены с использованием методик, изложенных в работах [13–15].

Таблица 1

**Результаты исследования обусловленности системы уравнений баланса сил при изменении давления  $P$**

Вещество	$H$ , мм	$h_1$ , мм	$h_2$ , мм	$F_1$ , мН	$F_2$ , мН	$V_1$ , мм <sup>3</sup>	$V_2$ , мм <sup>3</sup>	$m_{\sigma 1}$ , мм	$m_{\sigma 2}$ , мм	$\zeta_p$	$\zeta_\sigma$
Вода	20	0,6	2,0	0,25	1,20	10,0	73	3,0	8,5	2,4	<b>2,8</b>
		0,6	4,0	0,25	2,35	10,0	135	3,0	17,5	2,6	3,1
		1,0	4,0	0,58	2,35	34,0	135	4,5	17,5	53,9	69,0
		2,0	4,0	1,20	2,35	73,0	135	8,5	17,5	22,1	19,8
		1,0	2,0	0,58	1,20	34,0	73	4,5	8,5	13,5	28,1
Раствор этилового спирта в воде (40 % об.)		0,6	2,0	0,08	0,82	2,0	54	3,0	9,0	1,3	<b>1,5</b>
		1,0	4,0	0,60	1,53	17,0	115	4,5	19,0	3,0	2,5
		1,0	2,5	0,60	1,00	17,0	67	4,5	11,0	3,5	2,6
		2,5	4,0	1,00	1,53	67,0	115	11,0	19,0	158,8	158,9
Этиловый спирт		0,6	2,0	0,08	0,63	2,2	54	2,8	9,0	1,5	<b>1,4</b>
	2,0	4,0	0,63	1,30	55,0	110	9,0	17,5	39,3	47,8	
Эпоксидная смола ЭД-20	10	1,0	12,0	0,17	4,30	4,0	350	5,0	20,0	1,1	1,3
		1,0	4,0	0,17	0,84	4,0	45	5,0	14,0	2,1	1,7
		4,0	12,0	0,84	4,30	45,0	350	14,0	20,0	1,3	2,6
		5,0	10,0	1,25	3,20	75,0	240	16,0	18,0	1,8	4,7
		0,4	5,0	0,10	1,25	1,2	75	3,0	16,0	1,5	<b>1,2</b>
	15	0,4	12,0	0,09	5,60	0,8	450	3,0	24,0	1,1	1,1
		1,0	4,0	0,28	1,24	7,0	68	8,0	18,0	1,9	1,7
		1,0	2,5	0,28	0,83	7,0	36	8,0	15,5	2,7	2,3
		0,4	4,0	0,09	1,24	0,8	68	3,0	18,0	1,6	<b>1,1</b>
		0,4	2,5	0,09	0,83	0,8	36	3,0	15,5	2,0	1,2
	25	0,4	10,0	0,18	8,60	5,0	680	5,0	37,5	1,1	1,4
		0,4	4,0	0,18	2,80	5,0	190	5,0	29,0	1,5	<b>1,5</b>
		1,0	4,0	0,55	2,80	30,0	190	8,0	29,0	3,6	5,0
		0,4	3,0	0,18	2,00	5,0	120	5,0	24,5	1,7	1,7
		4,0	10,0	2,80	8,60	190,0	680	29,0	37,5	1,8	6,7
	40	0,4	6,0	0,24	7,20	7,0	540	5,0	41,0	1,3	1,5
		0,4	4,0	0,24	4,20	7,0	300	5,0	33,0	1,5	<b>1,5</b>
1,0		4,0	0,85	4,20	47,0	300	11,0	33,0	2,6	4,2	

При взаимодействии струи газа с невязкими жидкостями (вода, этиловый спирт) существенное влияние на геометрические параметры оказывает наличие переходного режима течения при значении числа Рей-

нольда в диапазоне 800–1000. При  $Re = 800$  формируются углубления малого объема с максимальным значением отношения высоты к радиусу. Высота  $h$  таких углублений зависит от поверхностного натяжения жидкостей и изменяется в диапазоне 0,5...1,7 мм. Меньшему поверхностному натяжению соответствует большая высота.

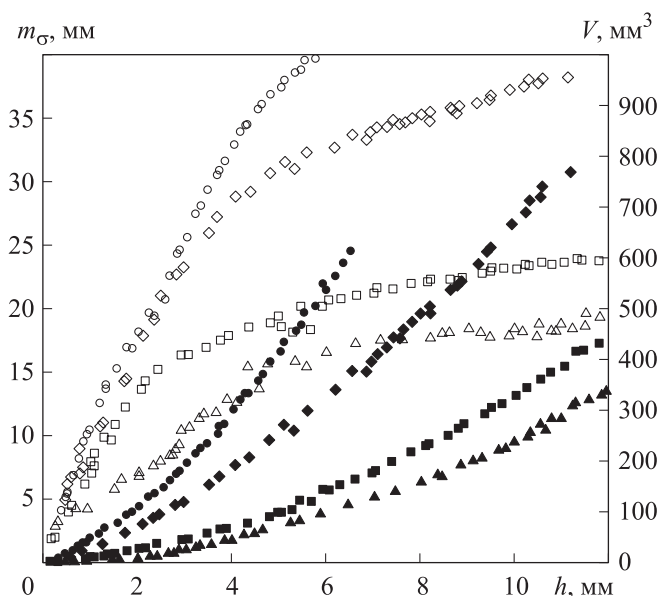
Для повышения обусловленности системы уравнений (2) следует выбирать заданные значения  $h_1 < 0,5$  мм и  $h_2 > 1,7$  мм. Первое условие непосредственно обеспечивает повышение обусловленности за счет близких нулю значений объема  $V_1$  углубления в первом уравнении системы (2), а второе — однозначное задание формы углубления для второго уравнения. Если  $h_2 < 1,7$  мм, то второму уравнению для малых  $\sigma$  соответствует  $Re < 1000$  и малые значения  $V_2$  и  $F_2$ , а для больших  $\sigma$  —  $Re > 1000$  и большие значения  $V_2$  и  $F_2$ . В результате этого погрешность измерения малых значений поверхностного натяжения значительно возрастает. Аналогично при  $h_1 > 0,5$  мм увеличивается погрешность измерения больших значений поверхностного натяжения, хотя и в меньшей степени.

Данные, представленные в табл. 1, подтверждают сделанные выводы. Наилучшая обусловленность системы (2) наблюдается при  $h_1 = 0,6$  мм и  $h_2 > 2,0$  мм (значения  $\zeta_\sigma$  выделены полужирным). В связи с тем, что значение высоты  $h_1$  немного превышает 0,5 мм, для жидкости с наибольшим поверхностным натяжением наблюдается худшая обусловленность. При дальнейшем увеличении значения  $h_1$ , например, до 1,0 мм, обусловленность системы становится неприемлемой для применения рассматриваемого метода измерений поверхностного натяжения и плотности жидкостей. Это объясняется тем, что при  $h_1 > 1$  мм зависимости  $V(h)$  и  $m_\sigma(h)$  близки к функциям прямой пропорциональности, вследствие чего правые части уравнений системы (2) становятся почти тождественными, а система вырожденной.

Для вязких жидкостей не характерна пропорциональность зависимостей  $V(h)$  и  $m_\sigma(h)$  (рис. 2), поэтому хорошая обусловленность системы (2) наблюдается при большем числе комбинаций различных значений  $h_1$  и  $h_2$ . Согласно данным табл. 1, для вязких жидкостей наилучшая обусловленность системы по параметру  $\zeta_\sigma$  также соответствует  $h_1 < 1$  мм. Это объясняется низкими значениями объема  $V$  в этом диапазоне (см. рис. 2).

Если значение  $h_1$  велико (более 4 мм), то коэффициент  $\zeta_\rho$  сохраняет сравнительно низкое значение, а коэффициент  $\zeta_\sigma$  существенно возрастает.





**Рис. 2.** Зависимости геометрических параметров  $V$  и  $m_\sigma$  от высоты  $h$  углубления на поверхности эпоксидной смолы при различных значениях расстояния  $H$  до отверстия истечения:

для  $V$   $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacklozenge$ ,  $\bullet$  соответствуют  $H = 10, 15, 25, 40$  мм;  
 для  $m_\sigma$   $\triangle$ ,  $\square$ ,  $\diamond$ ,  $\circ$  соответствуют  $H = 10, 15, 25, 40$  мм

Это связано с тем, что параметр  $m_\sigma$  интенсивно изменяется при  $h < 4$  мм (см. рис. 2). Если заданные значения  $h_1$  и  $h_2$  больше 4 мм, то сила  $F_\sigma$  поверхностного натяжения при переходе от первого уравнения системы (2) ко второму изменяется сравнительно слабо, что затрудняет точное определение величины  $\sigma$ .

Увеличение значения  $h_2$  способствует уменьшению коэффициента  $\zeta_\sigma$ , но при  $h_2 > 4$  мм это не приводит к получению существенных результатов. Значение  $h_2$  целесообразно выбирать из диапазона 3...4 мм.

**Исследование обусловленности системы уравнений баланса сил при изменении расстояния.** Метод одновременных измерений поверхностного натяжения и плотности жидкостей, основанный на решении системы уравнений баланса сил, полученных путем изменения расстояния  $H$  между отверстием истечения газовой струи и поверхностью жидкости, заключается в следующем. Устанавливают расстояние  $H$  равным большему из двух заданных значений ( $H_2$ , см. рис. 1, б). Увеличивают давление  $P$  от нуля до значения  $P_2$ , при котором высота углубления становится равной заданному значению  $h_0$  (см. рис. 1, б). При отсутствии аэродинамического воздействия

на жидкость уменьшают расстояние  $H$  до заданного  $H_1$  и вновь увеличивают давление  $P$  до значения  $P_1$ , соответствующего заданной высоте  $h_0$  углубления. Полученные значения давлений  $P_1$  и  $P_2$  используют для определения сил  $F_1$  и  $F_2$ , входящих в формулы (3) и (4) для расчета измеряемых величин  $\rho$  и  $\sigma$  [14]. Величины  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $m_{\sigma 1}$ ,  $m_{\sigma 2}$  в этих формулах являются константами и определяются экспериментально для соответствующих заданных значений  $H_1$  и  $H_2$  расстояния  $H$  и значения  $h_0$  высоты углубления.

Результаты проверки обусловленности системы уравнений баланса сил для рассматриваемого метода показывают, что так же, как и в случае метода с постоянным расстоянием  $H$ , повышению точности измерения поверхностного натяжения способствует уменьшение заданного значения  $h_0$  высоты углубления (табл. 2). Приемлемые значения коэффициента  $\zeta_{\sigma}$  достигаются при следующих условиях:  $h_0 \leq 2$  мм;  $H_1 \leq 15$  мм;  $H_2 \geq 25$  мм. Рассматриваемый метод характеризуется худшими показателями обусловленности системы уравнений (2) относительно метода с постоянным расстоянием  $H$  (см. табл. 1).

Таблица 2

**Результаты исследования обусловленности системы уравнений баланса сил при изменении расстояния  $H$  для эпоксидной смолы ЭД-20**

$h_0$ , мм	$H_1$ , мм	$H_2$ , мм	$F_1$ , мН	$F_2$ , мН	$V_1$ , мм <sup>3</sup>	$V_2$ , мм <sup>3</sup>	$m_{\sigma 1}$ , мм	$m_{\sigma 2}$ , мм	$\zeta_{\rho}$	$\zeta_{\sigma}$
0,4	10	15	0,10	0,09	1,2	0,8	3,0	3,0	9,8	4,2
	10	25	0,10	0,18	1,2	5,0	3,0	5,0	13,1	<b>1,9</b>
	10	40	0,10	0,24	1,2	7,0	3,0	5,0	3,0	<b>1,7</b>
	15	25	0,09	0,18	0,8	5,0	3,0	5,0	5,6	<b>1,5</b>
	15	40	0,09	0,24	0,8	7,0	3,0	5,0	2,4	<b>1,4</b>
	25	40	0,18	0,24	5,0	7,0	5,0	5,0	4,7	20,7
1,0	10	15	0,17	0,28	4,0	7,0	5,0	8,0	36,3	19,9
	10	25	0,17	0,55	4,0	30,0	5,0	8,0	1,8	<b>1,6</b>
	10	40	0,17	0,85	4,0	47,0	5,0	11,0	1,6	<b>1,6</b>
	15	25	0,28	0,55	7,0	30,0	8,0	8,0	1,9	<b>1,7</b>
	15	40	0,28	0,85	7,0	47,0	8,0	11,0	1,7	<b>1,7</b>
	25	40	0,55	0,85	30,0	47,0	8,0	11,0	11,5	73,8
2,0	10	15	0,30	0,64	9,5	24,0	7,0	14,0	16,1	7,4
	10	25	0,30	1,24	9,5	73,0	7,0	17,0	2,3	<b>2,0</b>
	10	40	0,30	1,74	9,5	110,0	7,0	18,0	1,7	<b>1,8</b>
	15	25	0,64	1,24	24,0	73,0	14,0	17,0	2,6	<b>2,6</b>
	15	40	0,64	1,74	24,0	110,0	14,0	18,0	1,8	<b>2,3</b>
	25	40	1,24	1,74	73,0	110,0	17,0	18,0	4,6	14,3

$h_0$ , мм	$H_1$ , мм	$H_2$ , мм	$F_1$ , мН	$F_2$ , мН	$V_1$ , мм <sup>3</sup>	$V_2$ , мм <sup>3</sup>	$m_{\sigma 1}$ , мм	$m_{\sigma 2}$ , мм	$\zeta_p$	$\zeta_\sigma$
4,0	10	15	0,84	1,24	45,0	68,0	14,0	18,0	9,6	43,2
	10	25	0,84	2,80	45,0	190,0	14,0	29,0	2,7	4,6
	10	40	0,84	4,20	45,0	300,0	14,0	33,0	1,9	3,7
	15	25	1,24	2,80	68,0	190,0	18,0	29,0	3,6	5,1
	15	40	1,24	4,20	68,0	300,0	18,0	33,0	2,2	4,1
	25	40	2,80	4,20	190,0	300,0	29,0	33,0	4,8	19,8
10,0	10	15	3,20	4,25	240,0	330,0	18,0	23,3	42,3	33,3
	10	25	3,20	8,60	240,0	680,0	18,0	37,5	5,2	19,2
	15	25	4,25	8,60	330,0	680,0	23,3	37,5	6,0	55,2

**Заключение.** Представлена методика оценки обусловленности систем уравнений. Полученные критерии обусловленности для системы двух линейных алгебраических уравнений подобны числу обусловленности, используемому в линейной алгебре. Критерии показывают, во сколько раз возрастает погрешность определения искомых величин относительно погрешностей прямых измерений в результате плохой обусловленности системы.

В качестве еще одного варианта критериев обусловленности возможно применение величин, обратных представленным. В этом случае значения критериев будут изменяться в диапазоне 0...1 и могут быть выражены в процентах. Значения критериев возрастают с улучшением обусловленности.

Полученные критерии применены для оценки обусловленности системы уравнений баланса сил в бесконтактных аэродинамических методах одновременных измерений плотности и поверхностного натяжения жидкостей. Полученные результаты соответствуют результатам теоретического анализа процессов взаимодействия струи газа с поверхностью жидкости. Согласно результатам расчета критериев обусловленности с использованием экспериментальных данных, для всех бесконтактных аэродинамических методов одновременных измерений плотности и поверхностного натяжения жидкостей повышению точности измерения способствует уменьшение заданного значения высоты углубления ( $h_1 < 1$  мм или  $h_0 < 1$  мм). Метод с постоянным значением расстояния  $H$  от отверстия истечения газовой струи до поверхности жидкости характеризуется лучшими значениями критериев обусловленности, чем метод с варьированием расстояния  $H$ , несмотря на то, что последний является предпочтительным с теоретической точки зрения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] РМГ 29–2013. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. М., Стандартинформ, 2014.
- [2] Калиткин Н.Н., Юхно Л.Ф., Кузьмина Л.В. Количественный критерий обусловленности систем линейных алгебраических уравнений. *Матем. моделирование*, 2011, т. 23, № 2, с. 3–26.
- [3] Мордасов Д.М. Пневмодинамический бесконтактный контроль плотности жидких веществ. *Вестник ТГТУ*, 2004, т. 10, № 3, с. 666–674.
- [4] Гализдра В.И., Мищенко С.В., Мордасов Д.М. и др. Контроль поверхностного натяжения жидких веществ в промышленных условиях. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 1997, т. 63, № 5, с. 28–30.
- [5] Білінський Й.Й., Городецька О.С. Оптико-електронний вимірювач поверхневого натягу рідин. Патент 71259 UA. Заявл. 15.12.2003, опубл. 15.11.2004.
- [6] Backes P.G. Paint viscosity monitoring system and method. Patent 5024080 US. Appl. 03.04.1990, publ. 18.06.1991.
- [7] Суслин М.А., Кузьменко О.Ю., Дмитриев Д.А. Способ определения вязкости жидких сред и устройство для его реализации. Патент 2180438 РФ. Заявл. 07.07.1999, опубл. 10.03.2002.
- [8] Гребенникова Н.М., Мордасов М.М. Пневматический метод контроля вязкости жидкостей. *Вестник ТГТУ*, 2005, т. 11, № 1, с. 81–87.
- [9] Nowinski S. A device for measuring physical properties of liquids. Patent 2192987 GB. Appl. 21.07.1987, publ. 27.01.1988.
- [10] Дмитриев Д.А., Мордасов М.М., Муромцев Ю.Л. Устройство для измерения физико-химических свойств жидкости. Патент 1824538 СССР. Заявл. 03.06.1991, опубл. 30.06.1993.
- [11] Филатов И.С., Брусенцов Ю.А., Мордасов М.М. Устройство для измерения поверхностного натяжения. Патент 2156968 РФ. Заявл. 06.04.1999, опубл. 27.09.2000.
- [12] Galizdra V.I., Mordasov M.M. Aerohydrodynamic nondestructive measuring of physicommechanical parameters of fluids. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2005, т. 71, № 5, с. 34–38.
- [13] Мордасов М.М., Савенков А.П., Чечетов К.Е. Методика исследования взаимодействия струи газа с поверхностью жидкости. *ЖТФ*, 2016, т. 86, № 5, с. 20–29.
- [14] Мордасов М.М., Савенков А.П., Чечетов К.Е. Об уточнении расчетных зависимостей силового действия турбулентной газовой струи. *ЖТФ*, 2015, т. 85, № 10, с. 141–144.
- [15] Мордасов М.М., Савенков А.П. Измерение геометрических параметров поверхностей раздела газожидкостных систем. *Измерительная техника*, 2015, № 7, с. 47–49.

**Савенков Александр Петрович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Мехатроника и технологические измерения» ТГТУ (Российская Федерация, 392000, Тамбов, ул. Советская, д. 106).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Савенков А.П. Определение критериев обусловленности для оценки увеличения погрешности измерений в результате решения систем уравнений. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2019, № 1, с. 20–34.

DOI: 10.18698/0236-3933-2019-1-20-34

**DETERMINING CAUSALITY CRITERIA FOR ESTIMATING INCREASES IN MEASUREMENT UNCERTAINTY AS A RESULT OF SOLVING SYSTEMS OF EQUATIONS**

A.P. Savenkov

savencow@yandex.ru

**Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation**

**Abstract**

We used the methods of computing indirect measurement uncertainties to derive causality criteria for systems of linear algebraic equations. The methods were employed to analyse the accuracy of physical quantity measurement techniques. The paper considers the methodology behind criterion derivation using a system of two linear algebraic equations as an example. We present the results of relying on these criteria to analyse non-contact aerodynamic techniques of simultaneously measuring density and surface tension in liquids

**Keywords**

*Measurement, criterion, causality, surface tension, error, system of equations*

Received 29.05.2018

© Author(s), 2019

*The study was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of agreement no. 14.577.21.0214 (unique project identifier RFMEFI57716X0214)*

**REFERENCES**

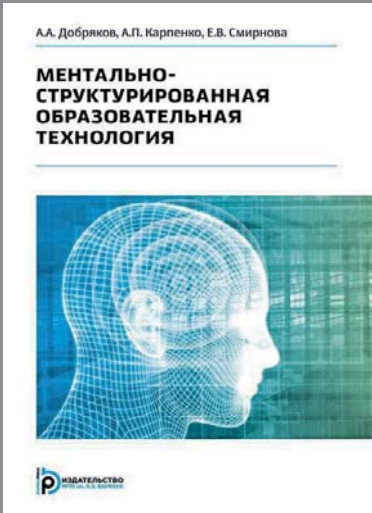
- [1] RMG 29–2013. Gosudarstvennaya sistema obespecheniya edinstva izmereniy. Metrologiya. Osnovnye terminy i opredeleniya [RMG 29–2013. State system for ensuring the uniformity of measurements. Metrology. Basic terms and definitions]. Moscow, Standartinform Publ., 2014 (in Russ.).
- [2] Kalitkin N.N., Yukhno L.F., Kuz'mina L.V. Quantitative criterion of conditioning for systems of linear algebraic equations. *Math. Models Comput. Simul.*, 2011, vol. 3, no. 5, pp. 541–556. DOI: 10.1134/S2070048211050097

- [3] Mordasov D.M. Pneumo-dynamic non-contact control of liquid substances density. *Vestnik TGTU* [Transactions of the TSTU], 2004, vol. 10, no. 3, pp. 666–674 (in Russ.).
- [4] Galizdra V.I., Mishchenko S.V., Mordasov D.M., et al. Control on surface tension of liquid materials in industrial conditions. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 1997, vol. 63, no. 5, pp. 28–30 (in Russ.).
- [5] Bilins'kiy Y.Y., Gorodets'ka O.S. Optiko-elektronniy vimiryuvach poverkhnevoogo natyagu ridin [Optoelectronic device for measuring surface tension of liquid]. Patent 71259 UA. Appl. 15.12.2003, publ. 15.11.2004.
- [6] Backes P.G. Paint viscosity monitoring system and method. Patent 5024080 US. Appl. 03.04.1990, publ. 18.06.1991.
- [7] Suslin M.A., Kuz'menko O.Yu., Dmitriev D.A. Sposob opredeleniya vyazkosti zhidkikh sred i ustroystvo dlya ego realizatsii [Method for defining liquid viscosity and device for its implementation]. Patent 2180438 RF. Appl. 07.07.1999, publ. 10.03.2002 (in Russ.).
- [8] Grebennikova N.M., Mordasov M.M. Pneumatic method of control over liquid viscosity. *Vestnik TGTU* [Transactions of the TSTU], 2005, vol. 11, no. 1, pp. 81–87 (in Russ.).
- [9] Nowinski S. A device for measuring physical properties of liquids. Patent 2192987 GB. Appl. 21.07.1987, publ. 27.01.1988.
- [10] Dmitriev D.A., Mordasov M.M., Muromtsev Yu.L. Ustroystvo dlya izmereniya fiziko-khimicheskikh svoystv zhidkosti [Device for measurement of physical-chemical properties of liquid]. Patent 1824538 SSSR. Appl. 03.06.1991, publ. 30.06.1993 (in Russ.).
- [11] Filatov I.S., Brusentsov Yu.A., Mordasov M.M. Ustroystvo dlya izmereniya poverkhnostnogo natyazheniya [Device for measurement of surface tension]. Patent 2156968 RF. Appl. 06.04.1999, publ. 27.09.2000 (in Russ.).
- [12] Galizdra V.I., Mordasov M.M. Aerohydrodynamic nondestructive measuring of physicomachanical parameters of fluids. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 2005, vol. 71, no. 5, pp. 34–38.
- [13] Mordasov M.M., Savenkov A.P., Chechetov K.E. Method for analyzing the gas jet impinging on a liquid surface. *Tech. Phys.*, 2016, vol. 61, iss. 5, pp. 659–668. DOI: 10.1134/S1063784216050170
- [14] Mordasov M.M., Savenkov A.P., Chechetov K.E. On refinement of calculation dependences of the force action of a turbulent gas jet. *Tech. Phys.*, 2015, vol. 60, iss. 10, pp. 1556–1559. DOI: 10.1134/S1063784215100229
- [15] Mordasov M.M., Savenkov A.P. Measurement of geometric parameters of interfaces in gas–liquid systems. *Meas. Tech.*, 2015, vol. 58, iss. 7, pp. 796–799. DOI: 10.1007/s11018-015-0796-x

**Savenkov A.P.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Mechatronics and Technological Measurements, Tambov State Technical University (Sovetskaya ul. 106, Tambov, 392000 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Savenkov A.P. Determining Causality Criteria for Estimating Increases in Measurement Uncertainty as a Result of Solving Systems of Equations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, no. 1, pp. 20–34 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3933-2019-1-20-34

	<p>В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет монография авторов <b>А.А. Добрякова, А.П. Карпенко, Е.В. Смирновой</b></p> <p><b>«Ментально-структурированная образовательная технология»</b></p> <p>В книге намечены пути улучшения качества обучения и повышения эффективности профессиональной деятельности специалистов инженерного профиля. В качестве основного средства решения этих задач предложена ментально-структурированная образовательная технология, позволяющая целенаправленно формировать не только фундаментальные знания, умения и навыки обучающихся, но и составляющие их мыслительной грамотности (знаниевая, или познавательная, функциональная, креативная, корпоративная и социально-экономическая грамотность). Эта же технология помогает в воспитании разнохарактерных профессионально значимых личностных качеств обучающегося. Исследована возможность создания информационно-коммуникационной обучающей среды, обеспечивающей поддержку гармонизированного (ментально-структурированного) обучения, ориентированного на использование интеллектуально-дидактических возможностей ЭВМ.</p> <p>Для специалистов, занимающихся проблемами высшей школы, научно-педагогических работников.</p> <p><b>По вопросам приобретения обращайтесь:</b> 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1 +7 (499) 263-60-45 press@bmstu.ru <a href="http://baumanpress.ru">http://baumanpress.ru</a></p>