

## НЕЧЕТКИЕ ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПОВ

Н.П. Деменков  
И.А. Мочалов  
Д.М. Чан

dnp@bmstu.ru  
mochalov2501@yandex.ru  
ruxi.tran@gmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Рассмотрены простейшие нечеткие модели осцилляторов, представленные четкими и нечеткими дифференциальными уравнениями второго порядка с четкими и нечеткими начальными условиями. Линейные модели представляют описание волновых процессов в кольцевых резонаторах волновых твердотельных гироскопов. Показано, что в случае 1 четкой модели с нечеткими начальными условиями, когда отсутствует внутреннее трение (модель 1), фазовые траектории имеют вид нечеткого центра в форме эллиптического кольца. При наличии внутреннего трения (модель 2) фазовые траектории имеют вид нечеткого фокуса в форме кольцевой логарифмической спирали. Для случая 2, когда имеет место нечеткая модель волнового твердотельного гироскопа с четкими начальными условиями, при отсутствии внутреннего трения (модель 1) изображающая точка нечеткой фазовой траектории с увеличением времени не прекращает свои колебания и они не нарастают, поэтому система асимптотически неустойчива, а для модели 2 особая точка начала координат является нечетким устойчивым фокусом. Для случая 3 — нечеткая модель волнового твердотельного гироскопа с нечеткими начальными условиями при отсутствии внутреннего трения (модель 1) — имеет место нечеткая асимптотическая неустойчивость модели 1 волнового твердотельного гироскопа, а при наличии внутреннего трения (модель 2) фазовая траектория также зависит от времени и задает асимптотическую устойчивость нечеткой модели 2 волнового твердотельного гироскопа. Для всех случаев и моделей определена асимптотическая устойчивость

### Ключевые слова

*Волновой твердотельный гироскоп, осциллятор, кольцевой резонатор, нечеткие фазовые траектории*

Поступила 18.02.2020

Принята 20.07.2020

© Автор(ы), 2021

**Введение.** В последнее время теория нечетких множеств получила широкое распространение применительно к решению разнообразных задач анализа и синтеза систем автоматического управления в условиях воздействия на них различного рода возмущений, вносящих неопределенность в их модельное представление. Реализованы различные нечеткие модели в представлении начальных и краевых задач для нечетких дифференциальных уравнений [1–9], нечеткого преобразования Лапласа [9–12]. Эти методы и модели применимы к решению задач оценивания [13, 14], интерполяции и обработке информации нечеткими сплайнами [15–18], исследованию принципа максимума для нечетких дробных задач оптимального управления [19], нечетких систем автоматической оптимизации [20], систем с прогнозированием [21], с использованием метода анализа иерархии [22], к нечеткому управлению силовыми гироскопическими приборами [23], созданию различных нечетких моделей для волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) [24].

Однако в применении нечетких методов имеются некоторые проблемы, нерешенные к настоящему времени, но являющиеся центральными в нечеткой теории автоматического управления. Очевидно, к ним относится задача определения устойчивости нечетких динамических систем [25]. В общей постановке эта задача является нерешенной до сих пор, однако некоторые методы, в частности метод нечетких фазовых траекторий, к настоящему времени достаточно хорошо разработан и с успехом применяется для исследования устойчивости нечетких динамических систем, описываемых нечеткими дифференциальными уравнениями второго порядка [26–31].

Метод, основанный на понятии фазового пространства, характеризуется геометрической наглядностью и возможностью получения полного представления о движениях системы. В связи с этим он широко используется среди методов анализа линейных и нелинейных систем в традиционной математике и теории управления. Создателем метода является А. Пуанкаре, который применил его для анализа систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка. Часто этот метод применяется для исследования процессов управления на асимптотическую устойчивость и по сравнению с другими методами имеет значительную простоту.

Условия асимптотической устойчивости систем с нечетким управлением на основе использования квадратичной и нечеткой функций Ляпунова найдены в [30]. Фазовая плоскость системы в [31] разбивается на подобласти, с каждой из которых связана линейная модель. Каждая линейная модель представлена в форме пространства состояний.

Для идентификации выбранных параметров линейных систем используется метод наименьших квадратов, для получения общего выхода нелинейной системы — нечеткое представление.

Волновой твердотельный гироскоп — один из наиболее перспективных гироскопических приборов, предназначенных для определения угла поворота и угловой скорости вращения объекта в инерциальных системах навигации. Принцип действия ВТГ основан на инертных свойствах стоячих упругих волн, возбужденных в осесимметричных оболочках. Чувствительным элементом прибора является кварцевый резонатор — тонкая полусферическая оболочка, изготовленная из плавленого кварцевого стекла и закрепленная на цилиндрическом стержне в области полюса.

Основы теории ВТГ и исследование влияния различных физических источников возмущений на точность ВТГ приведены в [32–37] и др. Однако до сих пор имеются такие нерешенные проблемы, как влияние неопределенных параметров на динамику ВТГ, компенсация погрешности ВТГ с учетом влияния неопределенных технологических дефектов.

При расчете параметров ВТГ используют различные модели — от традиционных уравнений математической физики для решения начальных и краевых задач до классических линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В реальности ВТГ всегда имеют неопределенности, обусловленные суммарным воздействием технологических дефектов при их изготовлении, неоднородностью плотности материала, толщин оболочек, различных возмущений, вызванных побочными вибрациями и другими неконтролируемыми факторами.

В настоящее время в теории ВТГ имеет место расчет каждой компоненты, определяющей неопределенность, и как правило, для ее описания применяют детерминированные и вероятностные модели. Такой подход при моделировании является достаточно сложным и не всегда адекватным. Например, при использовании вероятностной модели накладываются жесткие ограничения на соответствующие плотности распределения вероятностей, их моменты и т. д., которые на практике не всегда выполняются, что приводит к значительным ошибкам при расчете точностных параметров ВТГ. Детерминированные методы часто достаточно сложны.

В навигационных системах, включающих в себя ВТГ, большое значение приобретают нечеткие модели в описании неопределенности их функционирования. Это обусловлено возможностью представления не только наихудших и наилучших результатов функционирования систем в неопределенных условиях, как это позволяют интервальные методы, но и полу-

чения промежуточных результатов. Такой подход более прост по сравнению с традиционными подходами и дает более адекватные оценки при расчете параметров резонаторов.

Существенный интерес представляет изучение амплитуд стационарных колебаний от параметров, характеризующих демпфирование, частоту внешнего воздействия и нелинейность упругих свойств материала резонатора.

**Определения.** Терминология нечетких множеств и другие ее положения, которые использованы в работе, изложены в [7–10, 24].

В качестве нечеткой производной используется производная Сейкка-ла, которая для нечеткой функции  $f(t, r)$ ,  $r \in [0; 1] \subset R$ ;  $t \in [0; T] \subset R$ , определяется в виде:

$$\dot{f}_t(t, r) = \left( \underline{\dot{f}}_t(t, r), \overline{\dot{f}}_t(t, r) \mid r \in [0, 1] \right).$$

Применяется следующее представление нечеткой функции в виде комплексной переменной:

$$z_n = \left( \underline{z}(r), \overline{z}(r) \mid r \in [0; 1] \right) = \underline{z}(r) + i\overline{z}(r); i = (-1)^{1/2}.$$

**Постановка задачи.** Применительно к резонатору исследуемая динамическая система представляется в канонической матричной форме Коши:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t=0) = x_0, \quad (1)$$

где  $x(t)$ ,  $x_0 \in R^2$ ;  $A$  — матрица с  $\dim A = (2 \times 2)$ ;  $a_{ij} \in R$ ,  $i, j = 1, 2$ ;  $t \in [0; T] \subset R$ .

Рассматриваются три случая.

*Случай 1.* Вектор  $x_0$  в (1) является нечеткой переменной, т. е.  $x_0 = x_{n0} \in E^2$ , индекс «н» обозначает нечеткость;  $E^2$  — двумерное нечеткое векторное пространство.

*Случай 2.* Вектор  $x_0 \in R^2$ , элементы  $a_{ij} \in E$  — нечеткие переменные.

*Случай 3.* Вектор  $x_0 = x_{n0} \in E^2$ ;  $a_{ij} \in E$ .

*Цель работы* — рассмотрение простейших случаев 1–3 и построение нечетких фазовых траекторий применительно к линейным моделям, которые возникают при описании резонаторов волновых твердотельных гироскопов [24] при отсутствии (модель 1) и наличии (модель 2) внутреннего трения.

**Метод решения.** При анализе динамических систем с использованием фазовых траекторий применены два метода.

В первом из них фазовое представление получается из общего решения исходного четкого дифференциального уравнения второго порядка, т. е. путем нахождения второго интеграла. Этот метод является наиболее простым и понятным. Далее он применен для случая 1 моделей 1, 2.

Во втором методе, который применен в случаях 2, 3 моделей 1, 2, каждая компонента общего решения является нечеткой переменной. Поэтому она имеет две составляющие в виде нижней и верхней ее частей. В этих случаях для представления фазовых траекторий реализована матричная форма описания моделей ВТГ применительно к нечеткому дифференциальному уравнению первого порядка, определенному над полем комплексных переменных.

**Нечеткие фазовые траектории осциллятора ВТГ. Случай 1 модели 1 ВТГ [27].** Рассматривается четкое уравнение движения кольцевого резонатора при отсутствии внутреннего трения ( $\xi = 0$ ,  $\xi$  — коэффициент демпфирования) и внешней нагрузки с нечеткими начальными условиями, когда уравнение движения имеет вид нечеткой начальной задачи второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{a}(\tau) + ka(\tau) = 0, k = 36/5 > 0 — \text{четкое уравнение;} \\ a(\tau = 0) = a_{н1}, \dot{a}(\tau = 0) = a_{н2} = 0_n — \text{нечеткие начальные условия,} \end{cases} \quad (2)$$

где  $a(\tau)$  — амплитуда перемещения стоячей волны в радиальном направлении кольцевого резонатора;  $\tau$  — безразмерное время.

Для нахождения фазовой траектории в виде некоторой зависимости  $f(a, \dot{a}, a_{н1}, a_{н2})$  будем использовать первый метод ее определения как наиболее простой по сравнению со вторым методом, изложенным в [24]. В этом случае общее решение (2) находится традиционным способом вследствие того, что уравнение (2) имеет четкое представление:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + k = 0 — \text{характеристическое уравнение;} \\ \lambda_{1,2} = i(k)^{1/2} — \text{его корни являются чисто мнимыми.} \end{aligned}$$

Поэтому четкое общее решение (2) имеет вид

$$a(\tau) = c_1 \cos(k^{1/2}\tau) + c_2 \sin(k^{1/2}\tau), \quad (3)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные, определяемые из нечетких начальных условий.

Определяем  $\dot{a}(\tau)$  из (3):

$$k^{-1/2}\dot{a}(\tau) = -c_1 \sin(k^{1/2}\tau) + c_2 \cos(k^{1/2}\tau). \quad (4)$$

Неизвестный вектор  $C_0 = (c_1, c_2)^T$  находится из нечеткой системы линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ), полученной из (3), (4) при  $\tau = 0$ :

$$B_0 C_0 = A_{H0}, \quad (5)$$

где  $B_0 = \left( \begin{array}{cc} \cos(k^{1/2}\tau) & \sin(k^{1/2}\tau) \\ -\sin(k^{1/2}\tau) & \cos(k^{1/2}\tau) \end{array} \right) \Big|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det B_0 = 1 \neq 0$ ,  $B_0$  — матрица с четкими элементами;  $A_{H0} = (a_{H1}, k^{-1/2}a_{H2})^T$  — заданный нечеткий вектор начальных условий;  $C_0$  — вектор, подлежащий определению из расширенной системы НСЛАУ [14].

Имеем

$$C_0^* = C_{H0}^* = B_0^{-1} A_{H0}, \quad \det B \neq 0, \quad (6)$$

где «\*» — символ найденного решения. Здесь  $C_0^* = C_{H0}^*$  обусловлено выравниванием нечеткостей, т. е. справа и слева в (6) должны находиться нечеткие переменные.

В соответствии с теорией решения НСЛАУ из (6) получим

$$C_{H0}^* = B_0^{-1} A_{H0} \Rightarrow C_0^*(r) = S^{-1} A_0(r). \quad (7)$$

Здесь

$$C_0^*(r) = (\underline{c}_1^*(r), \underline{c}_2^*(r), \bar{c}_1^*(r), \bar{c}_2^*(r))^T;$$

$$A_0(r) = (\underline{a}_1(r), k^{-1/2}\underline{a}_2(r), \bar{a}_1(r), k^{-1/2}\bar{a}_2(r))^T;$$

$S = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}$  — блочная матрица с блоками  $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ,  $I$  — единичная матрица;  $\det S \neq 0$ ;  $S^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ .

В результате получим компоненты  $c_{H1}^*$ ,  $c_{H2}^*$  вектора  $C_{H0}^*$ :

$$c_{H1}^* = c_1^*(r) = (\underline{c}_1^*(r) = \underline{a}_1(r), \bar{c}_1^*(r) = \bar{a}_1(r));$$

$$c_{H2}^* = c_2^*(r) = (\underline{c}_2^*(r) = k^{-1/2}\underline{a}_2(r), \bar{c}_2^*(r) = k^{-1/2}\bar{a}_2(r)),$$

которые в соответствии с теорией НСЛАУ могут быть «сильными/слабыми», поэтому после их подстановки в (3), (4) могут быть получены «сильные/слабые»  $a(\tau)$ ,  $\dot{a}(\tau)$  и далее «сильные/слабые» фазовые траектории.

Для первого квадранта, когда  $k^{1/2}\tau > 0$ , имеем  $\sin(k^{1/2}\tau) > 0$ ,  $\cos(k^{1/2}\tau) > 0$ , поэтому из (3), (4) с учетом (7) получим

$$A_H(\tau) = T(\tau)A_{H0},$$

где

$$A_H(\tau) = A(r, \tau) = \begin{pmatrix} \underline{a}(r, \tau) & k^{-1/2}\dot{\underline{a}}(r, \tau) \\ -\bar{a}(r, \tau) & -k^{-1/2}\dot{\bar{a}}(r, \tau) \end{pmatrix};$$

$$A_{H0} = A_0(r) = \begin{pmatrix} \underline{a}_1(r) & k^{-1/2}\underline{a}_2(r) \\ -\bar{a}_1(r) & -k^{-1/2}\bar{a}_2(r) \end{pmatrix};$$

$$T(\tau) = \begin{pmatrix} B(\tau) & 0 \\ 0 & B(\tau) \end{pmatrix}; \quad B(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(k^{1/2}\tau) & \sin(k^{1/2}\tau) \\ -\sin(k^{1/2}\tau) & \cos(k^{1/2}\tau) \end{pmatrix}.$$

Для нижнего значения, обозначенного нижним подчеркиванием, определим

$$\underline{A}(r, \tau) = B(\tau)A_0(r); \quad \underline{A}(r, \tau) = (\underline{a}(r, \tau), k^{-1/2}\dot{\underline{a}}(r, \tau))^T;$$

$$\underline{A}_0(r) = (\underline{a}_1(r), k^{-1/2}\underline{a}_2(r))^T,$$

откуда

$$\underline{a}(r, \tau) = \underline{a}_1(r) \cos(k^{1/2}\tau) + k^{-1/2}\underline{a}_2(r) \sin(k^{1/2}\tau);$$

$$k^{-1/2}\dot{\underline{a}}(r, \tau) = -\underline{a}_1(r) \sin(k^{1/2}\tau) + k^{-1/2}\underline{a}_2(r) \cos(k^{1/2}\tau).$$

После возведения в квадрат и сложения получим

$$\underline{a}^2(r, \tau) + k^{-1}\dot{\underline{a}}^2(r, \tau) = \underline{a}_1^2(r) + k^{-1}\underline{a}_2^2(r). \quad (8)$$

Аналогично определим верхнее значение фазовой траектории, обозначенное верхней чертой:

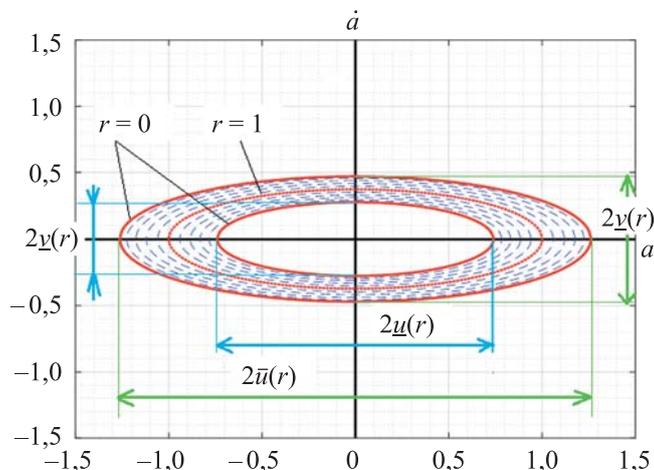
$$\bar{a}^2(r, \tau) + k^{-1}\dot{\bar{a}}^2(r, \tau) = \bar{a}_1^2(r) + k^{-1}\bar{a}_2^2(r). \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) задают нечеткую «сильную/слабую» фазовую траекторию в виде эллиптического кольца с нечеткими полуосями  $u_H, v_H$  (рис. 1):

$$u_H = u(r) = \left( \underline{u}(r) = [\underline{a}_1^2(r) + k^{-1}\underline{a}_2^2(r)]^{-1/2}, \bar{u}(r) = [\bar{a}_1^2(r) + k^{-1}\bar{a}_2^2(r)]^{-1/2} \right);$$

$$v_H = v(r) =$$

$$= \left( \underline{v}(r) = k^{-1/2} [\underline{a}_1^2(r) + k^{-1}\underline{a}_2^2(r)]^{-1/2}, \bar{v}(r) = k^{-1/2} [\bar{a}_1^2(r) + k^{-1}\bar{a}_2^2(r)]^{-1/2} \right).$$



**Рис. 1.** Нечеткая фазовая траектория относительно начала координат для кольцевого резонатора ВТГ при отсутствии внутреннего трения (нечеткий центр,  $u = (\underline{u}, \bar{u})$ ,  $v = (\underline{v}, \bar{v})$  — параметры)

При варьировании нечеткими начальными условиями вся фазовая плоскость будет заполнена замкнутыми кривыми в виде эллиптического кольца. Каждой из них на фазовой плоскости соответствует некоторое нечеткое периодическое движение в системе. Нечеткие колебания в ней зависят от нечетких начальных условий. Поэтому однажды начавшись, они уже не прекращаются и не нарастают, другими словами, нечеткая система является неустойчивой.

*Случай 1 модели 2 ВТГ [28].* Волновой процесс при наличии внутреннего трения имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{a}(\tau) + 2\alpha\dot{a}(\tau) + ka(\tau) &= 0; \\ a(\tau = 0) &= a_{1н}, \dot{a}(\tau = 0) = a_{2н}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\alpha = \xi k$ ,  $\xi$  — коэффициент демпфирования.

Вычисления дают:

$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + k = 0$  — характеристическое уравнение;

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\delta^{1/2}$  — корни характеристического уравнения,  $\delta = \alpha^2 - k$ .

С учетом значений собственной частоты ВТГ, выполненного из материала типа плавленого кварца, и его добротности будем иметь  $\delta < 0$ . Поэтому  $\lambda_1, \lambda_2$  являются комплексно-сопряженными корнями, и тогда запишем общее решение (10) в следующем виде:

$$a(\tau) = e^{-\alpha\tau} \left[ C_1 \cos(\delta^{1/2}\tau) + C_2 \sin(\delta^{1/2}\tau) \right], \quad (11)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

В компактной форме (11) представляется в виде гармонического колебания:

$$\alpha(\tau) = Ae^{-\alpha\tau} \cos(\omega_1\tau + \varepsilon), \quad (12)$$

где  $A$ ,  $\omega_1$ ,  $\varepsilon$  — величины, получаемые из соответствующего прямоугольного треугольника:

$$A = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = C_2 C_1^{-1}; \quad \omega_1(k - \alpha^2)^{1/2}.$$

После дифференцирования (12) получим

$$\dot{\alpha}(\tau) = -A\alpha e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_1\tau + \varepsilon) - A\omega_1 e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_1\tau + \varepsilon). \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) представляют собой параметрические уравнения фазовых траекторий с параметром  $\tau$ . Исключив его из этих уравнений, запишем

$$\dot{\alpha} + \alpha a = -A\omega_1 e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_1\tau + \varepsilon). \quad (14)$$

Из (12) имеем

$$\omega_1 \alpha = A\omega_1 e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_1\tau + \varepsilon). \quad (15)$$

Из уравнений (14), (15) получим

$$(\dot{\alpha} + \alpha a)^2 + \omega_1^2 \alpha^2 = A^2 \omega_1^2 e^{-2\alpha\tau}. \quad (16)$$

Находим зависимость  $\tau(a, \dot{a})$ , для чего разделим (14) на (15), что дает  $-(\dot{\alpha} + \alpha a)(\omega_1 \alpha)^{-1} = \operatorname{tg}(\omega_1\tau + \varepsilon)$ , откуда

$$\tau = -\left(\varepsilon + \operatorname{arctg}\left((\dot{a} + \alpha a)(\omega_1 a)^{-1}\right)\right) \omega_1^{-1}.$$

Подставляя полученные выражения в (16), определяем

$$(\dot{a} + \alpha a)^2 + \omega_1^2 a^2 = C \exp\left[2\alpha\omega_1^{-1} \operatorname{arctg}\left((\dot{a} + \alpha a)(\omega_1 a)^{-1}\right)\right], \quad (17)$$

где  $C = A^2 \omega_1^2 \exp(2\alpha\omega_1^{-1})$ .

Выражение (17) представляет собой уравнение фазовых траекторий в виде семейства спиралей, которые накручиваются на начало координат. Обычно для наглядности преобразования (17) его изображают в полярной системе координат. Для этого в (17) выполним линейное преобразование координат:  $x = \omega_1 a$ ;  $y = \alpha a + \dot{a}$ , тогда (14) получим в форме

$$x^2 + y^2 = C \exp\left[\left(2\alpha\omega_1^{-1}\right) \operatorname{arctg}\left(yx^{-1}\right)\right]. \quad (18)$$

После перехода к полярной системе координат  $(f, \varphi)$ :  $x = f \cos \varphi$ ;  $y = -f \sin \varphi$  уравнение (18) будет иметь вид

$$f^2 = C \exp\left[\left(2\alpha\omega_1^{-1}\right) \operatorname{arctg}(-\operatorname{tg} \varphi)\right] \Rightarrow f = C_* \exp\left(-\alpha\omega_1^{-1}\varphi\right), \quad (19)$$

где  $\operatorname{tg}(\varphi) = -(y\dot{x}^{-1}) = -(\dot{\alpha} + \alpha a)(\omega_1\alpha)^{-1} = \operatorname{tg}(\omega_1\tau + \varepsilon) \Leftrightarrow \varphi = \omega_1\tau + \varepsilon$ ,  $C_* = C^{1/2}$ .

Следовательно, в полярной системе координат  $(f, \varphi)$  получим (19) в виде уравнения логарифмической спирали:

$$f = C_* \exp[-\alpha\omega_1^{-1}(\omega_1\tau + \varepsilon)]. \quad (20)$$

Здесь  $C_*$ ,  $\varepsilon$  — произвольные константы, зависящие от нечетких начальных условий  $a(\tau = 0) = a_1$ ,  $\dot{a}(\tau = 0) = a_2$ . Для определенности примем, что они принадлежат первому квадранту. Из (11) и ее производной имеем НСЛАУ относительно вектора  $c_{H0} = (c_{H1}, c_{H2})$ :

$$mc_{H0} = a_{H0},$$

где  $a_{H0} = (a_{H1}, a_{H2})^T$ ;  $c_{H0} = (c_{H1}, c_{H2})^T$ ;  $m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \delta^{1/2} \end{pmatrix}$ ;  $\det m \neq 0$ .

Решение НСЛАУ  $c_{H0}^* = (c_{H1}^*, c_{H2}^*)^T$  «сильное/слабое» находим из расширенной системы [14]:

$$c_{H0}^* = S^{-1}a_{H0}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{H0}^* &= (\underline{c}_1^*(r), \underline{c}_2^*(r), \bar{c}_1^*(r), \bar{c}_2^*(r))^T; \quad a_{H0}^* = (\underline{a}_1^*(r), \underline{a}_2^*(r), \bar{a}_1^*(r), \bar{a}_2^*(r))^T; \\ S^{-1} &= \begin{pmatrix} D & E \\ E & D \end{pmatrix}; \quad D = 0,5 \left[ (m_1 + m_2)^{-1} - (m_1 - m_2)^{-1} \right]; \\ E &= 0,5 \left[ (m_1 + m_2)^{-1} + (m_1 - m_2)^{-1} \right]; \quad m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^{1/2} \end{pmatrix}; \quad m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Затем из (12) получим

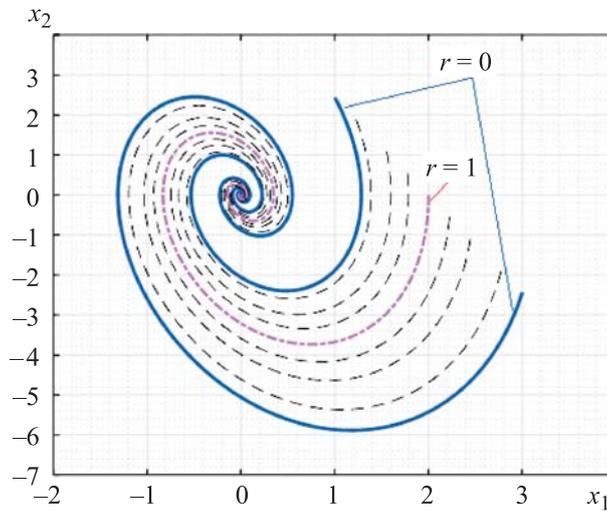
$$\begin{aligned} c_{H0}^* &= \left( \underline{c}_0^*(r) = \left( \underline{c}_1^{*2}(r) + \underline{c}_2^{*2}(r) \right)^{1/2}, \quad \bar{c}_0^*(r) = \left( \bar{c}_1^{*2}(r) + \bar{c}_2^{*2}(r) \right)^{1/2} \right); \\ \operatorname{tg} \varepsilon_H &= \left( \operatorname{tg} \underline{\varepsilon}(r) = \underline{c}_2^* / \underline{c}_1^*, \quad \operatorname{tg} \bar{\varepsilon}(r) = \bar{c}_2^* / \bar{c}_1^* \right). \end{aligned}$$

После подобных вычислений для (17), (19) определим  $c_{H2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_H$  и затем из (20):

$$f_H^* = \left( \underline{f}^*(r) = \underline{c}_*(r) \exp\left[-\alpha\omega_1^{-1}\underline{\varphi}^*(r)\right], \quad \bar{f}^*(r) = \bar{c}_*(r) \exp\left[-\alpha\omega_1^{-1}\bar{\varphi}^*(r)\right] \right). \quad (21)$$

Аналогично получим  $f_H$  для остальных квадрантов с учетом свойства операции умножения нечеткого числа на вещественную константу.

Нечеткая фазовая траектория ВТГ при наличии внутреннего трения, которая представлена в виде кольцевой логарифмической спирали в полярной системе координат, приведена на рис. 2. Из (21) и траектории на рис. 2 следует, что с увеличением  $\tau$  нечеткая длина  $f_H = (\underline{f}(r), \bar{f}(r) | r \in [0, 1])$  радиуса вектора, вращающегося по ходу часовой стрелки, убывает и изображающая точка  $M_0$  неограниченно приближается к началу координат. В связи с этим нечеткий ВТГ асимптотически устойчив. Это определяет начало координат в виде нечеткого устойчивого фокуса.



**Рис. 2.** Нечеткая фазовая траектория относительно начала координат для кольцевого резонатора ВТГ при наличии внутреннего трения

*Случай 2 модели 1.* Имеем нечеткое матричное дифференциальное уравнение первого порядка, к которому может быть приведено уравнение второго порядка с помощью замены Коши:

$$\dot{x}_H(\tau) = A_H x_H, \quad x(\tau = 0) = x_0, \tag{22}$$

где  $x_0 \in R^2$ ;  $A_H : \dim A_H = (2 \times 2)$ ;  $a_{nij} = E, i, j = 1, 2$ ;  $\tau \in R$ .

Если какая-то компонента нечеткой переменной  $x_{nr}$  в уровневой форме имеет вид  $x_{nr} = x_k(r, \tau) = (\underline{x}_k(r, \tau), \bar{x}_k(r, \tau))$ ,  $k = 1, 2$ , то (22) можно представить как

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_k(r, \tau) &= \min \left\{ (Au)_k : u_j \in (\underline{x}_j(r, \tau), \bar{x}_j(r, \tau) / r \in [0; 1]) \right\}; \\ \dot{\bar{x}}_k(r, \tau) &= \max \left\{ (Au)_k : u_j \in (\underline{x}_j(r, \tau), \bar{x}_j(r, \tau) / r \in [0; 1]) \right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

С учетом комплексной переменной будем иметь (23) в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_k(r, \tau) + i\dot{\bar{x}}_k(r, \tau) &= A(r)(\underline{x}(r, \tau) + i\bar{x}(r, \tau)); \\ x(r, \tau = 0) &= x(r). \end{aligned} \quad (24)$$

**Теорема 1 (без доказательства [28]).** Пусть  $A(\mu, r) = (1 - \mu)\underline{A}(r) + \mu\bar{A}(r)$ ,  $\mu = [0; 1]$ , тогда нечеткая дифференциальная система

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_k(r, \tau) + i\dot{\bar{x}}_k(r, \tau) &= \bigcup_{\mu=0}^1 B(\mu, r)(\underline{x}(r, \tau) + i\bar{x}(r, \tau)); \\ x(r, \tau = 0) &= x(r)_0 \end{aligned} \quad (25)$$

имеет единственное решение

$$\underline{x}(r, \tau) + i\bar{x}(r, \tau) = \exp\{\tau(B^0(r) \cup B^1(r))\}(\underline{x}(r, \tau = 0) + i\bar{x}(r, \tau = 0)). \quad (26)$$

Здесь  $b_{ij}^\mu$  — элементы матриц  $B^0(r)$ ,  $B^1(r)$ , определяемые по элементам  $a_{ij}^\mu$  матриц  $A^0(r) = \underline{A}(r)$ ,  $A^1(r) = \bar{A}(r)$  с помощью операторов  $e$ ,  $g$ :

$$b_{ij}^\mu = \begin{cases} ea_{ij}^\mu, & a_{ij}^\mu \geq 0; \\ ga_{ij}^\mu, & a_{ij}^\mu < 0, \end{cases}$$

где  $e: a + bi \rightarrow a + bi$  — тождественный оператор;  $g: a + bi \rightarrow a + bi$  — оператор «переключения» (flip) относительно диагонали первого и третьего квадрантов комплексной плоскости;  $\underline{A}(r) = (\underline{a}_{ij}(r))_{(2 \times 2)}$ ;  $\bar{A}(r) = (\bar{a}_{ij}(r))_{(2 \times 2)}$ .

**Теорема 2 (без доказательства [28]).** Для того чтобы (26) было решением (22), необходимо и достаточно, чтобы (26) было также решением (25).

**Теорема 3 (без доказательства [28]).** Если  $A(\mu = 0, r)$  является неотрицательной и  $x \in R_+$ , тогда для того, чтобы  $\underline{x}(r, \tau) + i\bar{x}(r, \tau)$  было решением (24), необходимо и достаточно, чтобы оно было также решением (25).

Теоремы 1–3 позволяют находить решения нечетких уравнений, представляющих модели ВТГ для случая 2, и далее по этим решениям путем исключения каким-либо способом  $\tau$  реализовывать соответствующие нечеткие фазовые траектории.

Для модели 1 ВТГ в (22) будем иметь

$$A_H = \begin{pmatrix} 0_H & 1_H \\ -k_H & 0_H \end{pmatrix},$$

а начальные условия заданы в виде  $x(\tau = 0) = (x_1(\tau = 0) = 0, x_2(\tau = 0) = 0)^T$ .

Для определения инвариант  $\delta$  и  $\gamma$ , задающих тип особых точек модели 1 в четком случае [28]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta = \det A = k > 0; \gamma = \text{tr } A = 0,$$

поэтому искомая точка является «центром», тогда матрица  $A$  может быть приведена к канонической форме:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть для определенности коэффициент  $k$  является нечетким с функцией принадлежности  $r(s)$  в форме параболической зависимости (рис. 3):

$$r(s) = \begin{cases} -(s-k)^2 + 1, & k-1 \leq s \leq k+1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \Leftrightarrow s(r) = \begin{cases} \underline{s}(r) = k - (1-r)^{1/2}, \\ \bar{s}(r) = k + (1-r)^{1/2} \end{cases} | r \in [0, 1]$$

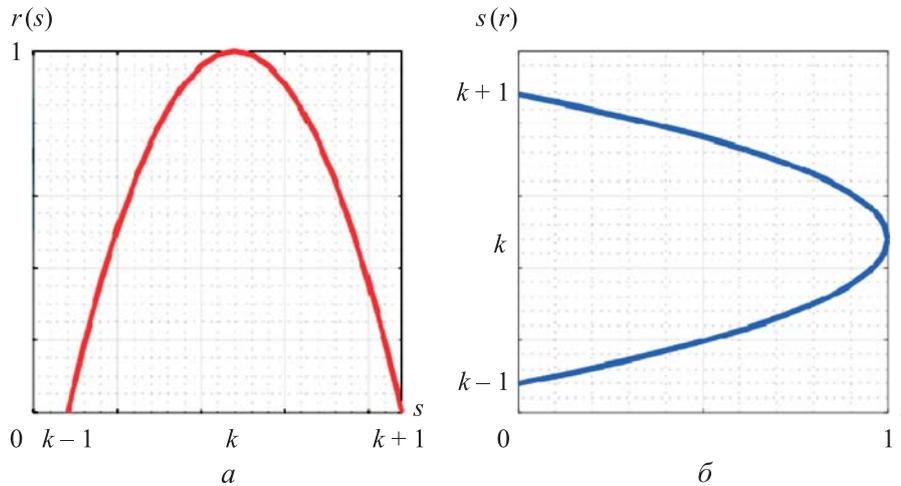


Рис. 3. Функция принадлежности  $r(s)$  (а) и ее уровневое представление (б)

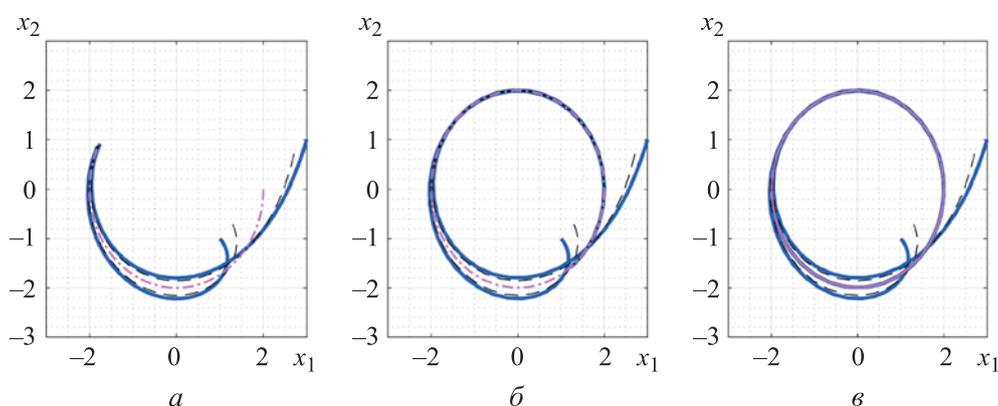
Пусть  $a = (1-\mu)(k - (1-r)^{1/2}) + \mu(k + (1-r)^{1/2})$ . Вычисления по (24), (25) дают нечеткое решение (26) в виде

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1(r, \tau) \\ \bar{x}_1(r, \tau) \\ \underline{x}_2(r, \tau) \\ \bar{x}_2(r, \tau) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} M + \cos a\tau/2 & N + \cos a\tau/2 & N - \sin a\tau/2 & -N - \sin a\tau/2 \\ -M + \cos a\tau/2 & -N + \cos a\tau/2 & -N - \sin a\tau/2 & N - \sin a\tau/2 \\ N + \sin a\tau/2 & M + \sin a\tau/2 & M + \cos a\tau/2 & -M + \cos a\tau/2 \\ -N + \sin a\tau/2 & -M + \sin a\tau/2 & -M + \cos a\tau/2 & M + \cos a\tau/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_{10} \\ \bar{x}_{10} \\ \underline{x}_{20} \\ \bar{x}_{20} \end{pmatrix},$$

где  $M = (e^{a\tau} + e^{-a\tau})/4$ ;  $N = (e^{a\tau} - e^{-a\tau})/4$ .

Задавая  $\tau = \tau_i, i = 1, \dots, l$ , получаем семейство фазовых траекторий  $x_{н2} = \varphi(x_{н1}, \tau_i)$ ,  $\varphi$  — некоторая функция (рис. 4).



**Рис. 4.** Фазовые траектории  $x_{н2} = \varphi(x_{н1}, \tau_i), i = 1, \dots, 3$ , для нечеткой модели ВТГ при отсутствии внутреннего трения с четкими начальными условиями при  $r = 0,5$  и  $\tau_i = 0,5$  (а),  $1,0$  (б) и  $3$  с (в),  $i = 1, \dots, 3$

Расчеты показывают, что, как и ранее в случае 1 для модели 1 ВТГ, изображающая точка нечеткой фазовой траектории с увеличением  $\tau$  не прекращает свои колебания и они не нарастают, поэтому система асимптотически неустойчива.

*Случай 2 модели 2 ВТГ [28].* Матрица  $A_{н}$  будет иметь вид

$$A_{н} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_{н} & -2\alpha_{н} \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующие инварианты четкой матрицы  $A$ :  $\delta = \det A > 0$ ;  $\gamma = \text{tr } A = 2\alpha(r)$ . Поэтому особая точка начала координат является фокусом, и матрица  $A$  может быть приведена к канонической форме, которая в нечетком случае будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} a(r) & -b(r) \\ b(r) & a(r) \end{pmatrix},$$

где  $a(r), b(r)$  — некоторые элементы, получаемые из  $A_H$ , с функциями принадлежности  $r_a(s), r_b(s)$ . Вычисления по (24), (25) дают (26):  $(x_{H1}(\tau), x_{H2}(\tau))^T$  и далее  $x_{H2}(\tau) = \psi(x_{H1}, \tau_i), i = 1, \dots, l$ . Расчеты показывают, что изображающая точка траектории ВТГ определяет начало координат в виде нечеткого устойчивого фокуса.

Случай 3 модели 1 ВТГ. Матричная задача Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{m}}(r, \tau) + i\dot{\overline{m}}(r, \tau) &= A_H(\underline{m}(r, \tau) + i\overline{m}(r, \tau)); \\ \underline{m}(r, \tau = 0) + i\overline{m}(r, \tau = 0) &= \underline{m}_0(r) + i\overline{m}_0(r), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_H &= (\underline{a}_{ij}(r) + i\overline{a}_{ij}(r)) \in E^2; \quad m_H(\tau) = (\underline{m}_{ij}(r) + i\overline{m}_{ij}(r)) \in E^2, \\ m &= (\underline{m}_0(r) + i\overline{m}_0(r)) \in E^2. \end{aligned}$$

Эта задача имеет единственное решение [29]:

$$\underline{m}(r, \tau) + i\overline{m}(r, \tau) = \exp \left\{ \tau \bigcup_{\mu=0}^1 B^\mu(r) \right\} (\underline{m}_0(r) + i\overline{m}_0(r)), \quad (28)$$

где  $b_{ij}^\mu$  — элементы матриц  $B^\mu(r)$ , определяемые по элементам  $a_{ij}^\mu$  матриц  $A = (\underline{A}, \overline{A})$  с помощью операторов  $e, g$ .

Далее, повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным для случая 2 модели 1, получаем соответствующие нечеткие фазовые траектории при  $\tau = \text{var}$ . Как и ранее, будем иметь нечеткую асимптотическую неустойчивость модели 1 ВТГ (рис. 5).

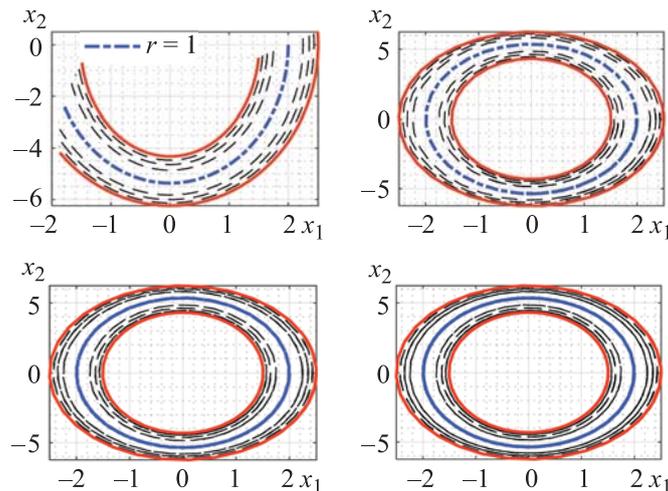


Рис. 5. Фазовые траектории  $x_{2H} = \varphi(x_{1H}, \tau_i), i = 1, \dots, 4$ , для нечеткой модели 1 ВТГ при отсутствии внутреннего трения при полных нечетких условиях

Случай 3 модели 2 ВТГ [29]. С учетом (27), (28) (по аналогии со случаем 2 модели 2) в результате расчетов получены нечеткие фазовые траектории при  $\tau = \text{var}$ , которые определяют нечеткую асимптотическую устойчивость модели 2 ВТГ (рис. 6).

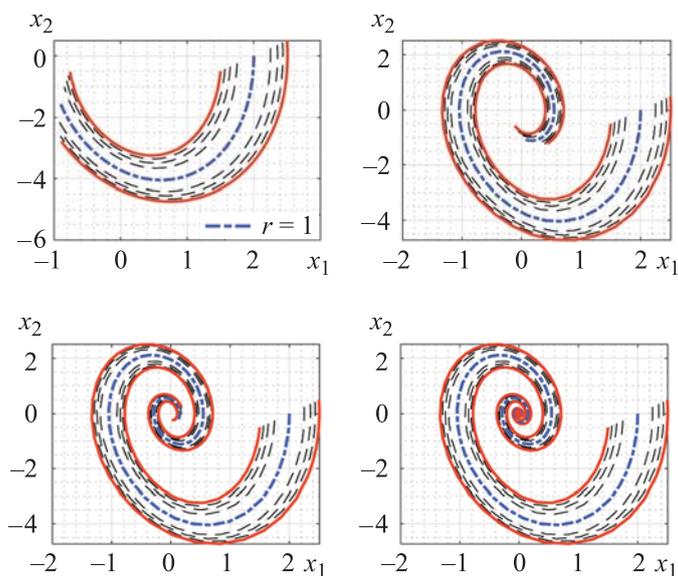


Рис. 6. Фазовые траектории  $x_{2н} = \varphi(x_{1н}, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , для нечеткой модели 2 ВТГ при наличии внутреннего трения и полных нечетких условиях

**Выводы.** Для четкой модели ВТГ при отсутствии внутреннего трения и нечетких начальных условий нечеткая фазовая траектория относительно начала координат имеет форму эллиптического кольца и определяет асимптотическую неустойчивость модели. При наличии внутреннего трения нечеткая фазовая траектория имеет форму кольцевой логарифмической спирали и определяет асимптотическую устойчивость нечеткой модели.

При нечеткой модели ВТГ с четкими начальными условиями и отсутствии внутреннего трения методом фазовой плоскости получена фазовая траектория, зависящая от безразмерного времени и определяющая асимптотическую неустойчивость модели. При наличии внутреннего трения фазовая траектория также зависит от времени и задает асимптотическую устойчивость нечеткой модели.

Для нечеткой модели ВТГ с нечеткими начальными условиями в обоих случаях отсутствия и наличия трения методом фазовой плоскости получены соответственно асимптотические неустойчивость и устойчивость моделей.

**Заключение.** Рассмотрены нечеткие фазовые траектории для линейных моделей ВТГ. Представляет интерес получение их для нелинейных моделей с использованием тейлоровской аппроксимации в окрестности особых точек и графических методов, например изоклин.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Witayakiattilerd W. Nonlinear fuzzy differential equation with time delay and optimal control problem. *Abstr. Appl. Anal.*, 2015, vol. 2015, art. 659072. DOI: <https://doi.org/10.1155/2015/659072>
- [2] Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я. Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. I. *Информационные технологии*, 2015, т. 21, № 3, с. 171–178.
- [3] Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я. Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. II. *Информационные технологии*, 2015, т. 21, № 4, с. 243–250.
- [4] Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я. Нечеткие уравнения в частных производных в задачах управления. *Информационные технологии*, 2015, т. 21, № 8, с. 563–569.
- [5] Wang Z.P., Wu H.N. Finite dimensional guaranteed cost sampled-data fuzzy control for a class of nonlinear distributed parameter systems. *Inf. Sci.*, 2016, vol. 327, pp. 21–39. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.08.009>
- [6] Jameel A.F., Anakira N.R., Alomari A.K., et al. New semi-analytical method for solving two-point  $n$ th order fuzzy boundary value problem. *IJMMNO*, 2019, vol. 9, no. 1, pp. 12–31. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMMNO.2019.096906>
- [7] Qian L., Junna Y. Two-point boundary value problems for fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Proc. ICMAI*, 2018, pp. 5–9. DOI: <https://doi.org/10.1145/3208788.3208791>
- [8] Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А. Нечеткие двухточечные краевые задачи в математическом моделировании и управлении. Ч. 1. *Проблемы управления*, 2018, № 1, с. 30–36.
- [9] Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А. Нечеткие двухточечные краевые задачи в математическом моделировании и управлении. Ч. 2. *Проблемы управления*, 2018, № 2, с. 31–39.
- [10] Gong Z., Hao Y. Fuzzy Laplace transform based on the Henstock integral and its applications in discontinuous fuzzy systems. *Fuzzy Sets Syst.*, 2019, vol. 358, pp. 1–28. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.005>
- [11] Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А. Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 1. *Информационные технологии*, 2017, № 4, с. 251–258.

- [12] Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А. Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 2. *Информационные технологии*, 2017, № 5, с. 362–369.
- [13] Gültekin Çitil H. Investigation of a fuzzy problem by the fuzzy Laplace transform. *AMNS*, 2019, vol. 4, iss. 2, pp. 407–416. DOI: <https://doi.org/10.2478/AMNS.2019.2.00039>
- [14] Pires D.S., Serra G.L.d.O. Methodology for evolving fuzzy Kalman filter identification. *Int. J. Control Autom. Syst.*, 2019, vol. 17, no. 3, pp. 793–800. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12555-017-0503-6>
- [15] Мочалов И.А., Хрисат М.С. Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным. *Информационные технологии*, 2014, т. 20, № 4, с. 14–22.
- [16] Деменков Н.П., Мочалов И.А. Нечеткая интерполяция. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2012, № 2. URL: <http://engineering-science.ru/doc/308732.html>
- [17] Деменков Н.П., Мочалов И.А. Нечеткие сплайны. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2012, № 2 (87), с. 48–59.
- [18] Reza E., Saeid A., Hossein B. Interpolation of fuzzy data by using at end fuzzy splines. *IJNAA*, 2017, vol. 8, iss. 2, pp. 89–97. DOI: <https://doi.org/10.22075/IJNAA.2017.1419.1363>
- [19] González P., Idais H., Pasadas M., et al. 3D fuzzy data approximation by fuzzy smoothing bicubic splines. *Math. Comput. Simul.*, 2019, vol. 164, pp. 94–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2018.10.005>
- [20] Fard O.S., Soolaki J., Torres D.F.M. A necessary condition of Pontryagin type for fuzzy fractional optimal control problems. *Discrete Contin. Dyn. Syst. S*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 59–76. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2018004>
- [21] Деменков Н.П., Мочалов И.А. Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2016, № 1 (106), с. 59–74. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2016-1-59-74>
- [22] de Andrés-Sánchez J., González-Vila Puchades L. A fuzzy-random extension of the Lee — Carter mortality prediction model. *Int. J. Comput. Intell. Syst.*, 2019, vol. 12, iss. 2, pp. 775–794. DOI: <https://doi.org/10.2991/ijcis.d.190626.001>
- [23] Zhao H., Li N. Performance evaluation for sustainability of strong smart grid by using stochastic AHP and fuzzy TOPSIS methods. *Sustainability*, 2016, vol. 8, iss. 2, art. 129. DOI: <https://doi.org/10.3390/su8020129>
- [24] Бураков М.В., Яковец О.Б. Нечеткое управление силовым гироскопическим прибором. *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*, 2015, т. 58, № 10, с. 804–809. DOI: <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2015-58-10-804-809>
- [25] Деменков Н.П., Матвеев В.А., Мочалов И.А. Нечеткие методы моделирования волновых твердотельных гироскопов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2018, № 3 (120), с. 33–50. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2018-3-33-50>

- [26] Манчук Д.А., Черный С.П. Анализ устойчивости нечетких систем управления в малом, в большом, в целом. *Современные наукоемкие технологии*, 2014, № 5-1, с. 74–75.
- [27] Tan Y., Shuai C., Jiao L., et al. An adaptive neuro-fuzzy inference system (ANFIS) approach for measuring country sustainability performance. *Environ. Impact Assess. Rev.*, 2017, vol. 65, pp. 29–40. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eiar.2017.04.004>
- [28] Xu J., Liao Z., Hu Z. A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition. *Fuzzy Sets Syst.*, 2007, vol. 158, iss. 21, pp. 2339–2358. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2007.04.016>
- [29] Mazandarani M., Najariyan M. A note on “A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition”. *Fuzzy Sets Syst.*, 2014, vol. 265, pp. 121–126. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.05.018>
- [30] Xu J., Liao Z., Nieto J.J. A class of linear differential dynamical systems with fuzzy matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, vol. 368, iss. 1, pp. 54–68. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.12.053>
- [31] Горюшкин В.А. Об устойчивости нечетких систем управления. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, № 1 (2), с. 17–25.
- [32] Бураков М.В., Брунов М.С. Структурная идентификация нечеткой модели. *Труды СПИИРАН*, 2014, № 34, с. 232–246.
- [33] Ghazanfari B., Niazi S., Ghazanfari A.G. Linear matrix differential dynamical systems with fuzzy matrices. *Appl. Math. Model.*, 2012, vol. 36, iss. 1, pp. 348–356. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.05.054>
- [34] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М., Наука, 1985.
- [35] Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А. Математическое моделирование физических процессов в гироскопии. М., Радиотехника, 2005.
- [36] Егармин Н.Е. Динамика неидеальной оболочки и управление ее колебаниями. *Изв. РАН МТТ*, 1993, № 4, с. 49–59.
- [37] Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М., ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- [38] Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А. и др. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2014, № 4 (97), с. 80–96.
- [39] Деменков Н.П., Чан Д.М. Влияние технологических дефектов на погрешность волнового твердотельного гироскопа. *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения*, 2017, № 3, с. 626–629.

**Деменков Николай Петрович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Мочалов Иван Александрович** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Чан Динь Минь** — аспирант кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Деменков Н.П., Мочалов И.А., Чан Д.М. Нечеткие фазовые траектории волновых твердотельных гироскопов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2021, № 1 (134), с. 78–101.

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2021-1-78-101>

**FUZZY PHASE TRAJECTORIES IN HEMISPHERICAL  
RESONATOR GYROSCOPES**

**N.P. Demenkov**

**I.A. Mochalov**

**D.M. Tran**

[dnp@bmstu.ru](mailto:dnp@bmstu.ru)

[mochalov2501@yandex.ru](mailto:mochalov2501@yandex.ru)

[ruxi.tran@gmail.com](mailto:ruxi.tran@gmail.com)

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

The paper considers elementary fuzzy oscillator models represented by hard and fuzzy second-order differential equations with hard and fuzzy initial conditions. Linear models describe wave processes in ring resonators of hemispherical resonator gyroscopes. We show that in the case 1 (a hard model with fuzzy initial conditions), when there is no internal friction (model 1), phase trajectories appear as a fuzzy centre shaped as an elliptical ring. When internal friction is present (model 2), phase trajectories appear as a fuzzy focus shaped as a circular logarithmic spiral. In the case 2, for a fuzzy hemispherical resonator gyroscope model with hard initial conditions, when there is no internal friction (model 1), a representative point of a fuzzy phase trajectory does not stop or increase its oscillations with time, meaning that the system is asymptotically unstable, while for the model 2 the origin singularity is a fuzzy stable focus. In the case 3, for a fuzzy hemispherical resonator gyroscope model with fuzzy initial conditions, when there is no internal friction (model 1), there is a fuzzy asymptotic insta-

**Keywords**

*Hemispherical resonator gyroscope, oscillator, ring resonator, fuzzy phase trajectories*

bility in the model 1 of a hemispherical resonator gyroscope, while in the presence of internal friction (model 2), the phase trajectory is also a function of time and controls the asymptotic stability of the fuzzy model 2 of a hemispherical resonator gyroscope. Asymptotic stability is determined for all cases and models

Received 18.02.2020

Accepted 20.07.2020

© Author(s), 2021

## REFERENCES

- [1] Witayakiattilerd W. Nonlinear fuzzy differential equation with time delay and optimal control problem. *Abstr. Appl. Anal.*, 2015, vol. 2015, art. 659072. DOI: <https://doi.org/10.1155/2015/659072>
- [2] Mochalov I.A., Khrisat M.S., Shikhab Eddin M.Ya. Fuzzy differential equations in control. P. I. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2015, vol. 21, no. 3, pp. 171–178 (in Russ.).
- [3] Mochalov I.A., Khrisat M.S., Shikhab Eddin M.Ya. Fuzzy differential equations in control. P. II. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2015, vol. 21, no. 4, pp. 243–250 (in Russ.).
- [4] Mochalov I.A., Khrisat M.S., Shikhab Eddin M.Ya. Fussy partial differential equation in the task of control. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2015, vol. 21, no. 8, pp. 563–569 (in Russ.).
- [5] Wang Z.P., Wu H.N. Finite dimensional guaranteed cost sampled-data fuzzy control for a class of nonlinear distributed parameter systems. *Inf. Sci.*, 2016, vol. 327, pp. 21–39. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.08.009>
- [6] Jameel A.F., Anakira N.R., Alomari A.K., et al. New semi-analytical method for solving two-point  $n$ th order fuzzy boundary value problem. *IJMMNO*, 2019, vol. 9, no. 1, pp. 12–31. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMMNO.2019.096906>
- [7] Qian L., Junna Y. Two-point boundary value problems for fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Proc. ICMAT*, 2018, pp. 5–9. DOI: <https://doi.org/10.1145/3208788.3208791>
- [8] Demenkov N.P., Mikrin E.A., Mochalov I.A. Fuzzy two-point boundary value problems in mathematical modeling and control. P. 1. *Problemy upravleniya* [Control Sciences], 2018, no. 1, pp. 30–36 (in Russ.).
- [9] Demenkov N.P., Mikrin E.A., Mochalov I.A. Fuzzy two-point boundary value problems in mathematical modeling and control. P. 2. *Problemy upravleniya* [Control Sciences], 2018, no. 2, pp. 31–39 (in Russ.).
- [10] Gong Z., Hao Y. Fuzzy Laplace transform based on the Henstock integral and its applications in discontinuous fuzzy systems. *Fuzzy Sets Syst.*, 2019, vol. 358, pp. 1–28. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.005>

- [11] Demenkov N.P., Mikrin E.A., Mochalov I.A. Fuzzy transformation of Laplace in tasks of fuzzy mathematical modelling. P. 1. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2017, no. 4, pp. 251–258 (in Russ.).
- [12] Demenkov N.P., Mikrin E.A., Mochalov I.A. Fuzzy transformation of Laplace in tasks of fuzzy mathematical modelling. P. 2. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2017, no. 5, pp. 362–369 (in Russ.).
- [13] Gültekin Çitil H. Investigation of a fuzzy problem by the fuzzy Laplace transform. *AMNS*, 2019, vol. 4, iss. 2, pp. 407–416.  
DOI: <https://doi.org/10.2478/AMNS.2019.2.00039>
- [14] Pires D.S., Serra G.L.d.O. Methodology for evolving fuzzy Kalman filter identification. *Int. J. Control Autom. Syst.*, 2019, vol. 17, no. 3, pp. 793–800.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s12555-017-0503-6>
- [15] Mochalov I.A., Khrisat M.S. Estimation parameter model using fuzzy random data. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2014, vol. 20, no. 4, pp. 14–22 (in Russ.).
- [16] Demenkov N.P., Mochalov I.A. Fuzzy interpolation. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education: Scientific Publication], 2012, no. 2 (in Russ.). Available at: <http://engineering-science.ru/doc/308732.html>
- [17] Demenkov N.P., Mochalov I.A. Fuzzy splines. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2012, no. 2 (87), pp. 48–59 (in Russ.).
- [18] Reza E., Saeid A., Hossein B. Interpolation of fuzzy data by using at end fuzzy splines. *IJNAA*, 2017, vol. 8, iss. 2, pp. 89–97.  
DOI: <https://doi.org/10.22075/IJNAA.2017.1419.1363>
- [19] González P., Idais H., Pasadas M., et al. 3D fuzzy data approximation by fuzzy smoothing bicubic splines. *Math. Comput. Simul.*, 2019, vol. 164, pp. 94–102.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2018.10.005>
- [20] Fard O.S., Soolaki J., Torres D.F.M. A necessary condition of Pontryagin type for fuzzy fractional optimal control problems. *Discrete Contin. Dyn. Syst. S*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 59–76. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2018004>
- [21] Demenkov N.P., Mochalov I.A. Fuzzy system dynamics of automatic optimization. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2016, no. 1 (106), pp. 59–74 (in Russ.).  
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2016-1-59-74>
- [22] de Andrés-Sánchez J., González-Vila Puchades L. A fuzzy-random extension of the Lee — Carter mortality prediction model. *Int. J. Comput. Intell. Syst.*, 2019, vol. 12, iss. 2, pp. 775–794. DOI: <https://doi.org/10.2991/ijcis.d.190626.001>
- [23] Zhao H., Li N. Performance evaluation for sustainability of strong smart grid by using stochastic AHP and fuzzy TOPSIS methods. *Sustainability*, 2016, vol. 8, iss. 2, art. 129. DOI: <https://doi.org/10.3390/su8020129>

- [24] Burakov M.V., Yakovets O.B. Fuzzy logic control over a power gyroscopic system. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie* [Journal of Instrument Engineering], 2015, vol. 58, no. 10, pp. 804–809 (in Russ.).  
DOI: <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2015-58-10-804-809>
- [25] Demenkov N.P., Matveev V.A., Mochalov I.A. Fuzzy methods of hemispherical resonator gyroscope simulation. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2018, no. 3 (120), pp. 33–50 (in Russ.).  
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2018-3-33-50>
- [26] Manchuk D.A., Chernyy S.P. Stability analysis of fuzzy control systems in the small, in the large, as a whole. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii* [Modern High Technologies], 2014, no. 5-1, pp. 74–75 (in Russ.).
- [27] Tan Y., Shuai C., Jiao L., et al. An adaptive neuro-fuzzy inference system (ANFIS) approach for measuring country sustainability performance. *Environ. Impact Assess. Rev.*, 2017, vol. 65, pp. 29–40. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eiar.2017.04.004>
- [28] Xu J., Liao Z., Hu Z. A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition. *Fuzzy Sets Syst.*, 2007, vol. 158, iss. 21, pp. 2339–2358.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2007.04.016>
- [29] Mazandarani M., Najariyan M. A note on “A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition”. *Fuzzy Sets Syst.*, 2014, vol. 265, pp. 121–126.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.05.018>
- [30] Xu J., Liao Z., Nieto J.J. A class of linear differential dynamical systems with fuzzy matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, vol. 368, iss. 1, pp. 54–68.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.12.053>
- [31] Goryushkin V.A. On stability of fuzzy control systems. *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki* [Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences], 2011, no. 1 (2), pp. 17–25 (in Russ.).
- [32] Burakov M.V., Brunov M.S. Structural identification of fuzzy model. *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings], 2014, no. 34, pp. 232–246 (in Russ.).
- [33] Ghazanfari B., Niazi S., Ghazanfari A.G. Linear matrix differential dynamical systems with fuzzy matrices. *Appl. Math. Model.*, 2012, vol. 36, iss. 1, pp. 348–356.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.05.054>
- [34] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoy tverdotel'nyy giroskop* [Wave solid-state gyroscope]. Moscow, Nauka Publ., 1985.
- [35] Basarab M.A., Kravchenko V.F., Matveev V.A. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v girokopii* [Mathematical modeling of physical processes in gyroscope]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2005.
- [36] Egarmin N.E. Dynamics of a non-ideal shell and control on its vibrations. *Izv. RAN MTT*, 1993, no. 4, pp. 49–59 (in Russ.).
- [37] Merkur'yev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2009.

[38] Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., et al. Miniature gyroscope based on elastic waves in solids for small spacecraft. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2014, no. 4 (97), pp. 80–96 (in Russ.).

[39] Demenkov N.P., Tran D.M. Effect of technological defects on the error of a wave solid-state gyroscope. *Fundamental'nye problemy radioelektronnogo priborostroeniya* [Fundamental Problems of Radioengineering and Device Construction], 2017, no. 3, pp. 626–629 (in Russ.).

**Demenkov N.P.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Control System, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Mochalov I.A.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Control System, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Tran D.M.** — Post-Graduate Student, Department of Control System, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Demenkov N.P., Mochalov I.A., Tran D.M. Fuzzy phase trajectories in hemispherical resonator gyroscopes. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2021, no. 1 (134), pp. 78–101 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2021-1-78-101>