УДК 621.865.8-5.001.5

Н. С. В а с и л ь е в

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЕЙ

Доказано существование равновесия по Нэшу в векторной задаче маршрутизации. Установлено, что равновесие обладает свойствами устойчивости и эффективности по Парето. Обоснована сходимость игрового алгоритма поиска равновесия, уравнивающего длины маршрутов.

Ключевые слова: *многопродуктовые сети, маршрутизация, теория игр, равновесие по Нэшу, оптимальность по Парето, устойчивость решения.*

Рассмотрим многокритериальную оптимизационную задачу маршрутизации многопродуктовой сети. Создание эффективных систем управления потоками в транспортных сетях (ТС), например в пакетных телекоммуникационных системах, основано на моделях сетей с переменной метрикой [1–5]. Изменяемая метрика присуща даже однопродуктовой пакетной сети из-за наличия обратной связи между потоками и задержки в передаче пакетов (задержка — это метрика). Игнорирование такой зависимости не позволяет обеспечивать устойчивого управления потоками ТС [1].

Свойства ТС с переменной метрикой ранее изучались в связи с поиском равновесной маршрутизации глобальной пакетной сети передачи данных [2, 3]. При этом существование равновесной маршрутизации установлено лишь для сетей с близкой к кольцевой топологией. В результате проведения вычислительных экспериментов найдено равновесие по Нэшу в модели сети Интернет [4]. Таким образом, численный поиск равновесного решения задачи уже прошел экспериментальную апробацию, но не получил должного теоретического обоснования.

Настоящая статья посвящена доказательству общей теоремы существования равновесия и установлению его свойств — устойчивости и эффективности по Парето, сходимости алгоритма поиска равновесной маршрутизации, в котором, уравниваясь, уменьшаются длины маршрутов передачи продуктов.

Оптимизационная модель ТС. Топологию ТС представим в виде связного неориентированного графа $\Gamma = (U, V)$, вдоль ребер $l \in V$ ($l = 1, 2, \ldots, n$) которого расположены линии (каналы) передачи продуктов, а в узлах $u \in U$ размещены источники и стоки передаваемых потоков. Доставка продуктов каждой k-й пары источник–сток, или тяготеющей пары ($k = 1, 2, \ldots, K$) осуществляется по одному или нескольким маршрутам графа сети $\{L_j^k\}$, соединяющим эти узлы. Входные потоки $\lambda_k = \lambda_0^k$ поступают в узлы–источники, разделяются в них на маршрутные потоки $\{\lambda_j^k\}$ и по маршрутам $\{L_j^k\}$ передаются в соответствующие узлы-стоки, из которых покидают ТС.

Функционирование сети происходит с задержками $f_l(z_l)$ на линиях сети $l = 1, 2, \ldots, n$, зависящими от потоков z_l. Например, в пакетных сетях передачи данных время задержки всякого пакета на любой линии складывается из:

- времени определения направления дальнейшей передачи (в транзитный узел сети) с помощью маршрутной таблицы;
- времени ожидания пакета в очереди;
- времени пересылки пакета по выбранной линии.

Определение функций задержек составляет самостоятельную задачу [1]. Во всяком случае, эти функции неотрицательны, монотонно и неограниченно возрастают при увеличении интенсивности потока по линии до значения ее пропускной способности. (Согласно теории массового обслуживания при совпадении интенсивностей поступления и обслуживания заявок наблюдается неограниченный рост очередей.)

Время доставки продуктов вдоль маршрута L (или длина маршрута L) равно сумме задержек:

$$\rho_f\left(L, z\right) = \sum_{l \in L} f_l\left(z_l\right). \tag{1}$$

Зафиксировав векторную функцию $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, опустим далее индекс f в обозначении метрики сети (1). Потоки в сети задаются в единицах измерения интенсивности передачи. По смыслу использованных обозначений для всех допустимых значений индексов k, l должны выполняться балансовые соотношения

$$\sum_{j=1}^{J_k} \lambda_j^k = \lambda_0^k \text{ и } \sum_{j,k \in L_j^k} \lambda_j^k = z_l. \tag{2}$$

Здесь z_l обозначает суммарный поток по l-й линии ТС, который ограничен значением $\bar{z}_l$ — пропускной способностью линии:

$$z_l \leqslant \bar{z}_l, \ \ l = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Под допустимой маршрутизацией сети (для k-й тяготеющей пары) понимаем совокупность маршрутов $M^k = \{L_j^k\}$ и маршрутных потоков $\{\lambda_j^k\}$ (интенсивностей передачи) для всех тяготеющих пар $k = 1, 2, \ldots, K$ такую, что выполняются соотношения (2), (3) и $\rho(L_j^k, z) < \infty$. Векторный входной поток $(\lambda_0^1, \lambda_0^2, \ldots, \lambda_0^K)$ называется допустимым, если для него найдется допустимая маршрутизация.

Задавая маршрутизацию, будем перечислять только применяемые маршруты передачи, для которых маршрутные потоки положительны. В процессе управления ТС за счет ограничения входного потока обеспечивается его допустимость. Выбор допустимой маршрутизации $M = \{\{L_j^k\}, \{\lambda_j^k\}, k = 1, 2, \ldots, K\}$ однозначно задает вектор допустимых потоков по линиям ТС $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, от которого зависит время передачи продуктов (изменяется метрика сети (1)).

Любая k-я тяготеющая пара "заинтересована" в уменьшении времени доставки продуктов, которое определяется длинами применяемых маршрутов передачи (1). В сети с потоками z минимально возможное время доставки продуктов k-й пары составляет

$$\underline{T}^k(z) = \min_{\{L'^k\}} \rho(L^k, z),$$

где $\{L^k\}$ — множество всех маршрутов, соединяющих эту пару.

Маршрутизацию k-й тяготеющей пары назовем оптимальной, если все применяемые маршруты передачи имеют минимальную длину, равную $\underline{T}^k(z)$.

Поскольку вектор z зависит от выбираемой маршрутизации (см. (2)), то оптимальным решением этой задачи для k-й пары является выбор ее кратчайших маршрутов соединения в сети с изменяющейся метрикой (1) [5].

Далее исследуется игровая задача об оптимальной маршрутизации ТС. Тяготеющие пары $k = 1, 2, \ldots, K$ рассматриваются как игроки в бескоалиционной игре, выбирающие свою стратегию — маршрутизацию [2, 4]. Равновесие по Нэшу в этой игре назовем равновесной (оптимальной) маршрутизацией ТС. Соответствующий вектор потоков в сети также будем называть равновесным.

В равновесии каждой тяготеющей паре "невыгодно" отклоняться от своей маршрутизации (из-за этого время передачи продуктов только увеличится) при условии, что все остальные пары придерживаются своих маршрутизаций.

На практике выбор маршрутизации может проводиться не самими тяготеющими парами, а с помощью некоторого алгоритма, построенного на этом принципе. Таковы, например, сетевые протоколы [1].

Существование равновесия. Введем вспомогательную задачу математического программирования, определив функции $t_l = t_l(z_l)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ как решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ):

$$z_l \frac{dt_l}{dz_l} + t_l = f_l(z_l), \;\; t_l(0) = 0. \tag{4}$$

Пусть Z — многогранник допустимых потоков по линиям передачи. В соответствии с выражениями (2) и (3) Z — выпуклый ограниченный многогранник. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$F(z) = \sum_{l=1}^{n} z_l t_l(z_l) \to \min_{z \in Z}. \qquad (5)$$

Теорема 1. Пусть все функции задержек монотонно возрастают, дифференцируемы и $\forall l\ f_l(z) \to \infty$, $z \to \bar{z}_l$. Тогда, если $Z \neq \varnothing$, то минимум целевой функции (5) достигается в единственной точке z^*, которой отвечает некоторая равновесная маршрутизация.

Доказательство. С помощью критерия Сильвестра проверим положительную определенность матрицы Якоби целевой функции $F(z)$. Условия теоремы и определение этой функции (см. (4), (5)) дают

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_l^2} = (z_l t_l'(z_l) + t_l(z_l))' = f_l'(z_l) > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_{l_1} \partial z_{l_2}} = 0, l_1 \neq l_2,$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной z_l. Все условия этого критерия выполнены, поэтому целевая функция $F(z)$ — строго выпуклая. В условиях теоремы это позволяет сделать вывод о том, что решение выпуклой экстремальной задачи (5) существует и единственно.

Докажем, что z^* — точке минимума функции (5) — отвечает равновесная маршрутизация. Для этого применим теорему Куна–Таккера [6], которая в данном случае служит критерием оптимальности потока z^*. В записи условий оптимальности учтем, что ограничения (3) неактивны. Согласно принятым предположениям элемент z^* удовлетворяет строгим неравенствам в (3).

Выразим произвольный допустимый вектор z в виде $z = A\lambda$, где вектор $\lambda = (\lambda_j^k)$ входит в соотношения (2). Через A обозначена $n \times$ $\times J$-матрица всех маршрутов, соединяющих рассматриваемую тяготеющую пару. Напомним, что A — это 0×1-матрица инциденций ребра–маршруты. Маршруты передачи представлены столбцами матрицы A. Указанное представление вектора потоков $z = A\lambda$ всегда возможно: для неприменяемых маршрутов L_j^k полагаем $\lambda_j^k = 0$.

Условия оптимальности из теоремы Куна–Таккера в задаче (2)–(5) представляют собой систему соотношений, распадающуюся на подсистемы, описывающие оптимальные решения для отдельных тяготеющих пар. Поэтому рассмотрим произвольную пару k, зафиксировав маршрутизацию остальных пар. Для упрощения записи в обозначениях опустим верхний индекс k.

Итак, запишем функцию Лагранжа [6, 7]:

$$H(\mu, \lambda) = F(A\lambda) + \left\langle \mu, \lambda_0 - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \right\rangle, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Тогда критерий оптимальности маршрутизации (векторы $\lambda = \lambda^*$, $z^* = A\lambda^*$) для k-й тяготеющей пары принимает следующий вид:

$$\nabla_\lambda H = fA - \mu(1,\ldots,1) \geqslant 0, \ \ \forall j\, \lambda_j((fA)_j - \mu) = 0. \qquad (6)$$

Здесь вектор задержек $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ вычислен в точке z^*.

Если $\lambda_j \neq 0$, то из соотношений (6) следует равенство $(fA)_j = \mu$, а иначе $(fA)_j \geqslant \mu$. По определению матрицы маршрутов и из уравнения (1) $(fA)_j = \rho(L_j, z^*)$. Полученные соотношения означают, что все маршруты, применяемые произвольной k-й парой, являются кратчайшими (имеющими длину μ). Отсюда следует, что решение задачи маршрутизации, отвечающее вектору потоков z^*, равновесно, так как в соответствии с определением доказана оптимальность маршрутизации всех тяготеющих пар.

Эффективность равновесия. На множестве допустимых маршрутизаций ведем отношение эквивалентности. Именно, маршрутизации M_1, M_2 (всей сети или только отдельной пары) эквивалентны, если они приводят к одному и тому же вектору потоков z на линиях сети. Класс эквивалентности маршрутизации M обозначим как $R_z(M)$.

Для упрощения записи опустим индекс z, а множество применяемых k-й парой маршрутов $\{L_j^k\}$ при маршрутизации M — обозначим M^k.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Равновесной является всякая маршрутизация, которая эквивалентна равновесной маршрутизации.

Считаем, что в сети с потоками z может применяться произвольная эквивалентная маршрутизация. Это предположение имеет место в пакетных сетях, в которых управление передачей осуществляется с помощью маршрутных таблиц [1]. Тогда время доставки продуктов k-й пары вычисляется по следующей формуле:

$$T^k(z; M^k) = \max_{M' \in R_z(M^k)} \max_{L'^k_j \in M'} \rho(L'^k_j, z), \quad k = 1, 2, \ldots, K. \qquad (7)$$

Подстановка в уравнение (7) равновесной маршрутизации дает значения критериев (7), совпадающие с длинами применяемых (кратчайших) маршрутов (следствие 1).

Теорема 2. Пусть все пары узлов графа сети являются тяготеющими и для любых попарно смежных ребер k, l, m выполнены неравенства треугольника $f_k(0) \leqslant f_l(0) + f_m(0)$. Тогда равновесная маршрутизация Парето эффективна.

Доказательство. Рассуждая от противного, найдем такую допустимую маршрутизацию $M = \{\{L_j^k\}, \{\lambda_j^k\}, k = 1, 2, \ldots, K\}$, для которой

$$\forall k\, T^k(z) \leqslant T^k(z^*). \qquad (8)$$

Здесь хотя бы одно неравенство — строгое [8]. Поэтому равновесные потоки z^* таковы, что $z \neq z^*$.

Из неравенства треугольника следует, что в равновесии $z_l^* > 0$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$. Докажем, что

$$z_l \leqslant z_l^*, \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Если при маршрутизации M линия l не применяется для передачи продуктов, то соответствующее неравенство (9) очевидно выполнено. Пусть теперь $z_l > 0$, $l = (a, b)$. Можно считать, что у тяготеющей пары (a, b), номер которой k, имеется маршрут соединения $L \equiv \{(a, b)\} \in M^k$. Если это не так, то покажем, что существует маршрутизация $M'^k \in R(M^k)$, обладающая этим свойством. Тогда вместо M достаточно рассмотреть M'.

Поскольку $z_l > 0$, то найдется такая пара k', что $l = (a, b) \in L_{j'}^{k'} \in$ $\in M^{k'}$. Выберем величину Δ, $0 < \Delta < \min\{\lambda_j^k, \lambda_{j'}^{k'}\}$, где поток λ_j^k проходит по такому маршруту L_j^k, что $l \notin L_j^k \in M^k$. Тогда часть маршрутного потока λ_j^k, равную величине Δ, перебросим с маршрута L_j^k на L — новый для k-й пары маршрут соединения. Такую же величину Δ, являющуюся частью потока $\lambda_{j'}^{k'}$, направим по маршруту $L' = (L_{j'}^{k'} \backslash \{l\}) \cup L_j^k$, новому для пары k'. Все остальные элементы маршрутизации M оставим без изменения. В результате получена искомая маршрутизация M', $M' \in R(M)$.

Согласно допущению (8) относительно маршрутизаций M, M^* и определению критериев (7) имеем

$$\forall l = 1, 2, \ldots, n \, f_l(z_l) = \rho(L, z) \leqslant T^k(z) \leqslant T^k(z*) = f_l(z_l^*).$$

Поскольку функции задержек монотонно возрастают, отсюда получаем неравенства (9), $z \neq z^*$. Целевая функция задачи (5) монотонно возрастает по каждой переменной z_l. Тогда из неравенства (9) следует неравенство $F(z) < F(z^*)$, противоречащее тому, что z^* — минимум целевой функции задачи (5). Теорема 2 доказана.

Устойчивость решения. Исходные данные модели обычно имеют некоторую неопределенность. Возникает необходимость исследовать устойчивость искомого решения. В рассматриваемой модели будем варьировать все параметры с помощью изменения $c = (\lambda_0, \overline{z})$ — вектора, составленного из значений входных потоков и пропускных способностей линий ТС.

Задержки в сети и целевая функция (5) — это функции переменных z, c, а многогранник потоков — значение многозначного отображения $c \to Z(c)$. Предполагается, что параметр c изменяется в пределах множества C, такого, что при $c \in C$ выполняются все условия теоремы 1 и, кроме того, все функции задержек непрерывны по совокупности переменных. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Метрика сети непрерывно зависит от параметров модели.

Доказательство. Из теоремы о непрерывной зависимости ОДУ (4) от параметра следует, что целевая функция $F(z, c), z \in Z(c), c \in C$, экстремальной задачи (5) непрерывна. Анализ линейных соотношений (2) и (3) показывает, что отображение $c \to Z(c)$ непрерывно по Хаусдорфу [7]. Ввиду теоремы 1 отсюда можно заключить, что оптимальное решение задачи (5) $z^* = z^*(c)$ непрерывно зависит от параметра c. Таким образом, метрика сети также непрерывна, как сумма непрерывных функций (см. уравнение (1)).

Непосредственным следствием теорем 1 и 2 является вывод о том, что решение задачи маршрутизации устойчиво к изменению параметров модели.

Алгоритм поиска равновесной маршрутизации. Для поиска оптимальных маршрутов передачи продуктов каждой тяготеющей пары будем применять следующую схему алгоритма.

1. Произвольно выберем начальную маршрутизацию (шаг $t = 0$).

2. Пусть на шаге $t = 0, 1, \ldots$ уже построена маршрутизация, обозначаемая M^t ($M^t = (\{L_j^k\}, \{\lambda_j^k\})$). Ей отвечает вектор потоков z^t. В сети с фиксированной метрикой $\rho(L, z^t)$ найдем кратчайший маршрут L. (Достаточно воспользоваться алгоритмом Дейкстры [9].)

3. Пусть в текущей маршрутизации M^t существует маршрут L^t, имеющий бóльшую длину по сравнению с L. (Иначе решение задачи уже найдено.) Тогда часть потока λ^t, передаваемого по маршруту L^t, перебросим на маршрут L в целях уменьшения разности длин этих маршрутов. (Это возможно вследствие монотонности функций задержек, см. (1).) При этом либо уравняются длины маршрутов, либо маршрут L останется, по-прежнему, короче, а маршрут L^t не будет использоваться (в случае $\lambda|_L = \lambda^t$).

4. Определим очередную маршрутизацию ТС M^{t+1} как результат добавления к M^t пары $L, \lambda|_L$ и, возможно, исключения маршрута L^t в случае, когда он не будет применяться.

Указанные действия — применение принципа уравнивания Ю.Б. Гермейера как метода решения минимаксных задач [10] (см. критерий (7)).

Теорема 4. Последовательность маршрутизаций $\{M^t, t = 0, 1, \ldots\}$, построенная по принципу уравнивания, сходится к равновесному решению задачи.

Доказательство. Вычислим производную функции $F(A\lambda)$ в текущей точке $z^t = A\lambda^t$ по направлению вектора Δ, все координаты которого равны нулю за исключением тех, которые отвечают маршрутным потокам вдоль L и L^t и равны соответственно 1 и –1:

$$\frac{dF(A\lambda)}{d\Delta} = \langle fA, \Delta \rangle = \rho(L, z^t) - \rho(L^t, z^t) < 0.$$

Шаг градиентного метода в направлении Δ в целях выравнивания длин этих маршрутов приводит к уменьшению значения целевой функции в задаче (5): $F(z^{t+1}) < F(z^t),\ \ t = 0, 1, \ldots$

Монотонная числовая последовательность $\{F(z^t)\}$ сходится к $F(z^*)$, где z^* — решение задачи (5). Согласно теореме 1 $z^t \to z^*$, $t \to \infty$. По следствию 1 в пределе получаем равновесную маршрутизацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б е р т с е к а с Д., Г а л л а г е р Р. Сети передачи данных. – М.: Наука, 1989.
2. В а с и л ь е в Н. С. О свойствах решений задачи маршрутизации сети с виртуальными каналами // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37, № 7. – С. 785–793.
3. В а с и л ь е в Н.С. О свойствах решений задачи динамической маршрутизации сети // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38, № 1. – С. 42–52.
4. В а с и л ь е в Н. С., Ф е д о р о в В. В. О построении алгоритмов маршрутизации пакетных сетей на основе векторных критериев // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 3. – С. 36–47.
5. В а с и л ь е в Н. С. Задача о кратчайших маршрутах в сетях с переменной метрикой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Серия “Естественные науки”. – 2008. – № 1. – С. 70–75.
6. В а с и л ь е в Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.
7. И о ф ф е А. Д., Т и х о м и р о в В. М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.
8. П о д и н о в с к и й В. В., Н о г и н В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
9. Е м е л и ч е в В. А., М е л ь н и к о в О. И., С а р в а н о в В. И., Т ы ш к е в и ч Р. И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
10. Ф е д о р о в В. В. Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979.

Статья поступила в редакцию 31.03.2008

Николай Семенович Васильев окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1974 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области теории оптимального управления и ммоделирования распределенных телекоммуникационных систем.

N.S. Vasiliev graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1974. D. Sc (Phis.-Math.), Professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of theory of optimal control and simulation of distribute telecommunication systems.