УДК 004.72

А. С. Алёшкин, А. В. Савостьянова,
Д. О. Жуков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОБРАБОТКИ И ПЕРЕДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ В СЕТЯХ СО СЛУЧАЙНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Приведены модели динамики передачи данных с произвольным законом распределения времени между заявками. Показана возможность применения для описания таких процессов краевых задач и рассмотрены вопросы численного моделирования процессов передачи данных в сетях, имеющих случайную топологию.

Ключевые слова: *передача информации, численное моделирование, сети, топология.*

Одной из особенностей реальной информационной вычислительной сети (ИВС) является то, что в любой ее узел в произвольный момент времени может приходить произвольное число заявок разных типов, требующих различного времени обработки и затрат аппаратных ресурсов.

По сути дела передача и обработка данных в ИВС описывается произвольным законом распределения времени между заявками во входном и выходном потоках в узлах, что необходимо учитывать при управлении работой сети.

Другим важным аспектом является то, что соединение узлов в реальной ИВС происходит случайным образом (сеть имеет случайную структуру), и это также необходимо учитывать при моделировании ее работы.

В настоящее время при моделировании ИВС большинство исследователей используют следующие основные подходы [1].

1. Описание ИВС с помощью математического аппарата теории массового обслуживания [2–5].

2. Использование для моделирования работы ИВС аппарата теории графов.

3. Исследование работы ИВС с помощью аппарата теории нечетких множеств и нечеткой логики [5–7].

4. Описание ИВС с использованием аппарата тензорного анализа [8].

5. Использование для моделирования работы ИВС теории фракталов [9].

Все перечисленные направления исследований имеют как свои достоинства, так и недостатки, которые побуждают искать новые подходы к моделированию работы ИВС.

В настоящее время нет точных моделей и методов расчета характеристик сетей передачи и обработки данных с произвольной структурой (топологией) графа сети (при условии, что время между заявками во входном и выходном потоках распределено произвольным образом). Это означает, что для обеспечения бесперебойной и надежной работы сетей необходимо продолжить теоретические исследования и построение динамических моделей стохастических сетей с произвольной топологией.

Для исследований подобного рода перспективным является использование теории перколяции. В пользу этого метода говорит как некоторая схожесть процессов, происходящих в ИВС, и процессов, исследуемых теорией перколяции, так и то, что между различными узлами ИВС существуют случайные связи, по которым происходит регулярный обмен данными.

Для построения динамической модели работы ИВС в настоящей работе предлагается провести декомпозицию поставленной задачи и разделить ее решение на два уровня:

1) уровень описания динамики обработки заявок в отдельном узле;

2) уровень описания, учитывающий топологию всей сети, а также динамику обработки заявок в отдельном узле.

На первом уровне могут быть получены вероятностные характеристики работы отдельных узлов. А на втором уровне, используя полученные характеристики описания динамики обработки заявок в отдельном узле, можно построить общую модель работы ИВС.

Математическое моделирование вероятности перехода узла сети в перегруженное состояние при обработке стохастических данных. *Определение вероятности исключения узла (связи) из сети.* Поскольку любая связь узла сети участвует как в получении заявок, так и в их передаче, то поток заявок μ_i поступающих в узел на обработку, и поток заявок λ_i, уходящих после обработки, не будут зависеть от числа связей.

В определенный момент времени число заявок, приходящих в i-й узел, может превысить некоторый критический порог L заявок (который можно обслужить или задать, исходя из правил обеспечения надежной работы) и тогда можно считать, что узел перестает работать (т.е. узел исключается из сети). Будем считать, что узел находится в выключенном из сети (перегруженном) состоянии, если число заявок в нем равно некоторому пороговому значению L.

Для расчета характеристик процесса работы узла введем параметры входного и выходного потоков и времени обслуживания: τ_0 — среднее время обслуживания одной заявки; μ_i — среднее число заявок, поступающих на обслуживание в i-й узел за единицу времени (входной поток); λ_i — среднее число заявок, покидающих i-й узел за единицу времени (выходной поток)

Пусть за время τ_0 в узел приходит ε заявок, а покидает его одна заявка. Тогда $\varepsilon/\tau_0 = \mu$, $\tau_0\lambda = 1$.

Работа i-го узла (связи) складывается из отдельных шагов h, имеющих среднюю продолжительность τ_0. После каждого шага система

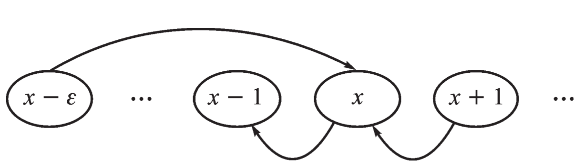

Рис. 1. Схема возможных переходов между состояниями i-го узла на $(h+1)$-м шаге

может переходить в одно из состояний, задаваемых числом заявок k, находящихся в узле.

Пусть после h шагов работы $P_{x-\varepsilon,h}$ есть вероятность того, что в выбранном i-м узле находится $x-\varepsilon$ заявок; $P_{x,h}$ и $P_{x+1,h}$ — вероятности того, что в нем находится x заявок и $x+1$ заявка. На одном шаге в узел может поступить некоторое число заявок, тогда $P_{x,h+1}$ — вероятность того, что на $(h+1)$-м шаге в i-м узле будет находиться некоторое число заявок x (рис. 1), можно определить как

$$P_{x,h+1} = P_{x-\varepsilon,h} + P_{x+1,h} - P_{x,h},$$

введем $t = h\tau_0$, где t — время работы узла, тогда

$$P(x, t+\tau_0) = P(x-\varepsilon, t) + P(x+\tau_0\lambda, t) - P(x,t). \tag{1}$$

Раскладывая функцию (1) в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} P(x,t) + \tau_0\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\tau_0^2}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} + \ldots = \\ = P(x,t) - \varepsilon\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} - \ldots + \\ + P(x,t) + \tau_0\lambda\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{(\tau_0\lambda)^2}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} + \ldots - P(x,t). \end{aligned}$$

Учитывая в левой части члены, содержащие не более чем первую производную по t, а в правой — не более чем вторую производную по x, получаем:

$$\tau_0\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2 + (\tau_0\lambda)^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - (\varepsilon - \tau_0\lambda)\frac{\partial P}{\partial x};$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{(\mu^2+\lambda^2)}{2\lambda}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} - (\mu-\lambda)\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}.$$

Вторую производную по t можно исключить, поскольку по своему смыслу она описывает процесс, при котором сами заявки при обработке становятся источниками дополнительных заявок. Поскольку функция $P(x,t)$ является непрерывной, перейдем от вероятности $P(x,t)$ к плотности вероятности $\rho(x,t)$, проведя операцию $\rho(x,t) = \partial P(x,t)/\partial x$, что позволит сформулировать следующую граничную задачу.

При числе заявок в узле $x = L$ он прекращает работу. Вероятность обнаружения такого узла будет отлична от нуля. Однако плотность вероятности, определяющую поток заявок в состоянии $x = L$, необходимо принять равной нулю (мы стремимся избежать этого состояния), т.е.

$$\rho(x,t)_{x=L} = 0.$$

Второе граничное условие выберем, исходя из следующих соображений: состояние $x = 0$ определяет простой в работе узла вследствие того, что заявки по какой-либо причине в узел не приходят и не уходят из него, и данный узел также будет исключенным. Сама вероятность обнаружения такого узла будет отлична от нуля, однако плотность вероятности, определяющую поток заявок в состоянии $x = 0$, необходимо положить равной нулю (так как мы стремимся избежать этого состояния), т.е.

$$\rho(x,t)_{x=0} = 0.$$

Считая, что μ и λ от x не зависят, и вводя обозначения $(\mu^2+\lambda^2)/2\lambda = a$ и $\mu - \lambda = b$, получаем:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2} - b\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}.$$

Поскольку в момент времени $t = 0$ в любом i-м узле уже может находиться x_i заявок, то начальное условие задаем в виде

$$\rho(x,t=0) = \delta(x-x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_i; \\ 0, & \text{если } x \neq x_i, \end{cases}$$

это приводит к разрыву производной.

Используя методы операционного исчисления для плотности вероятности $\rho(x,t)$ исключения узла из сети, можно получить следующие решения:

$$\rho_1(x,t) = \frac{2}{L}\exp\left(-\frac{(x_i - x) + \dfrac{bt}{2}}{\dfrac{2a}{b}}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{M}(-1)^{n+1}\sin\left(\pi n\frac{x_i}{L}\right)\sin\left(\pi n\frac{L-x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 at}{L^2}\right) \quad (2)$$

при $x > x_i$;

$$\rho_2(x,t) = \frac{2}{L}\exp\left(-\frac{(x_i - x) + \dfrac{bt}{2}}{\dfrac{2a}{b}}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{M}(-1)^{n+1}\sin\left(\pi n\frac{x}{L}\right)\sin\left(\pi n\frac{L-x_i}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 at}{L^2}\right) \quad (3)$$

при $x \leqslant x_i$.

Определение вероятности исключения узла (связи) из сети. Уравнения (2) и (3) описывают поведение плотности вероятности обнаружения состояния i-го узла сети в одном из значений на отрезке от 0 до L. Отметим, что состояния узла могут принимать только целочисленные значения, однако уравнения (2) и (3) задают непрерывные распределения, что не отвергает возможности их использования, поскольку эти уравнения могут быть дополнены следующим условием: значимыми являются только значения, полученные для целых значений x. Поэтому все результаты, приведенные далее на рисунках кривыми моделирования, можно рассматривать как заданные поточечно для целых значений x.

Если вычислить интеграл

$$P(L,t)=\int\limits_0^{x_i}\rho_2(x,t)dt+\int\limits_{x_i}^{L}\rho_1(x,t)dt,$$

то функция $P(L,t)$ будет задавать вероятность того, что состояние i-го узла к моменту времени t будет находиться на отрезке от 0 до L, т.е. узел будет находиться в невыключенном состоянии.

Соответственно вероятность $Q_i(t)$ того, что узел окажется к моменту времени t выключенным, можно определить следующим образом:

$$Q_i(t)=1-P(L,t).$$

Возьмем произвольное значение x_i, μ и λ ($\mu>\lambda$), например $x_i=50$, $\mu=15$ и $\lambda=7$. На рис. 2 приведена зависимость от времени вероятности $Q_i(t)$ того, что i-й узел к моменту времени t окажется выключенным для различных значений L исключения узла из сети. Кривая *1* для $L_1=75$, кривая *2* для $L_2=80$, кривая *3* для $L_3=85$, кривая *4* для $L_4=90$ и кривая *5* для $L_5=100$.

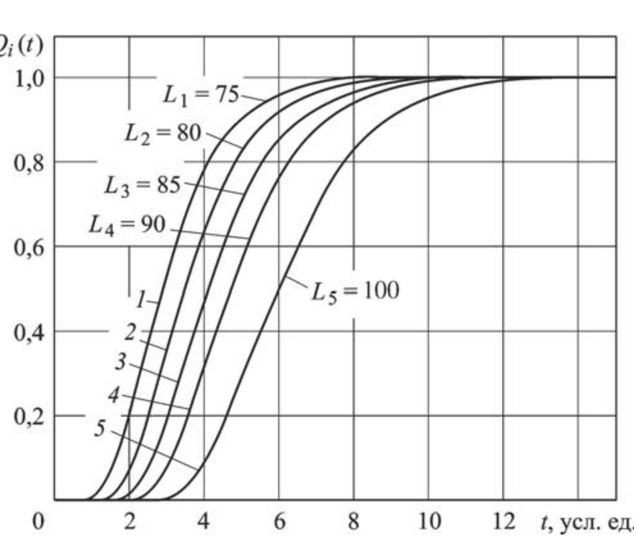

Рис. 2. Зависимость вероятности выключения i-го узла от времени $Q_i(t)$

Обратим внимание, что соответствующие вероятности становятся отличными от нуля только начиная с некоторого момента времени (см. рис. 2), а сами кривые сдвигаются в сторону бóльших времен. При других значениях x_i, μ и λ ($\mu > \lambda$) происходит количественное изменение расположения кривых, однако качественно результат остается неизменным.

Моделирование образования групп перегруженных узлов в сетях со случайной топологией. При работе ИВС нередко возникают ситуации, при которых один или несколько ее узлов оказываются в перегруженном состоянии, т.е. число заявок в данном узле превышает некоторый заданный критический порог и время ожидания заявок в очереди становится недопустимо большим. В определенном смысле такой узел можно считать исключенным из работы сети, поскольку он в течение некоторого времени будет неспособен передавать заявки (которые стоят в очереди к нему) другим узлам сети.

Если интенсивность обмена данными и загруженность ИВС велики, то в определенный момент времени возможно образование группы соседних перегруженных узлов, которую можно назвать кластером перегруженных или исключенных узлов. Если вероятность Q_i нахождения отдельного узла в перегруженном состоянии является заданной или определенной, то для описания возможности образования групп (или кластеров) перегруженных узлов могут быть использованы методы численного моделирования.

В определенном смысле ИВС можно рассматривать как некую структуру или среду, между узлами которой происходит обмен данными.

При управлении передачей данных крайне важно уметь моделировать и учитывать реальную топологию имеющихся физических сетей. Исторически сложившееся разнообразие не позволяет описать их единой упорядоченной структурой. Если, рассматривая локальные сети, еще можно выделить какие-то базовые структуры — звезду, кольцо, шину и другие, то при объединении локальных сетей в единую ИВС можно говорить только о структуре, имеющей в общем случае случайные связи.

С определенными допущениями для описания их топологии может быть использована сеть Кэйли со случайным числом связей между узлами. Отдельные узлы такой сети, имеющие только одну связь, можно считать как отдельными компьютерными системами или серверами удаленного доступа, так и самостоятельными локальными сетями. Узлы, имеющие множество связей, соответственно могут играть различные роли. Такая структура отличается тем, что имеются связи только между ближайшими узлами и нет дублирования каналов связи.

На практике для обеспечения надежности очень часто используется дублирование каналов. Кроме того, реальные сети могут иметь несколько различных путей связи между узлами по разным физическим каналам (т.е. сети можно представить в виде графа, между вершинами которого существуют различные пути).

Таким образом, описание динамики передачи данных невозможно без учета этих особенностей. Моделирование перколяции данных в случайных сетях возможно только с помощью численных методов.

В качестве платформы для реализации среды моделирования структур с регулярной и случайной топологиями и передачи данных была выбрана платформа .Net и язык C#, что позволило разработать программу, получившую название “Система имитационного моделирования обработки и перколяции данных в сетях с упорядоченной и случайной структурой”. После сбора необходимых массивов данных моделирования разработанное программное обеспечение позволяет отображать различные виды графиков, например зависимость среднего размера кластеров от вероятности исключения узла.

Случайная сеть Кэйли. Исследования показали, что для доли узлов, входящих в кластеры малых размеров, наблюдается некоторое различие между регулярной и случайной сетями Кэйли. Однако для среднего размера кластеров перегруженных узлов и зависимости числа областей неперегруженных узлов от вероятности Q_i наблюдается полное совпадение результатов для сети Кэйли со случайным числом связей между узлами с результатами для регулярной сети Кэйли с числом связей для одного узла $Z = 3$ (рис. 3). Увеличение числа возможных связей для одного узла в сетях Кейли не изменяет их общего среднего значения, так как доля узлов, находящихся на границах сети и имеющих только по одной связи с соседями, увеличивается таким образом, что среднее значение числа связей всегда стремится к пределу, равному 2.

Нерегулярные решетки с произвольным числом связей на узле. Исследования показали, что для нерегулярных решеток с числом связей

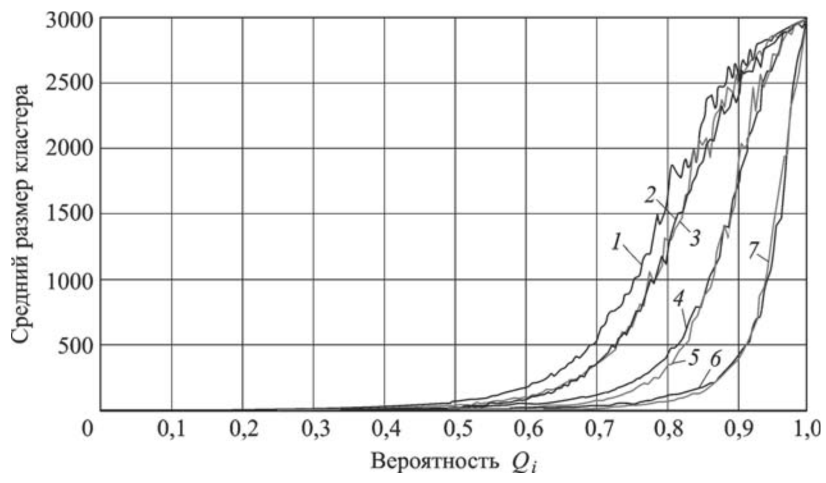

Рис. 3. Зависимость среднего размера кластеров перегруженных узлов от вероятности Q_i для сетей с регулярной и случайной структурами при разных значениях среднего числа связей

в одном узле от 2 до 7 увеличение их среднего числа оказывает существенное влияние на перколяционные процессы. Причем, чем больше среднее число связей, тем при меньших вероятностях Q_i должны начинаться процессы образования крупных кластеров исключенных узлов.

В то же время число областей перегруженных узлов с ростом вероятности Q_i уменьшается при увеличении среднего числа связей (чем меньше связей, тем более вероятно разделение сети на несвязанные области).

Аналогом сети Кэйли со случайным числом связей в одном узле является регулярная сеть Кэйли. В связи с этим возникает вопрос, а к какому типу регулярных сетей можно отнести решетку, в которой каждый узел имеет множество случайных связей с другими узлами. При рассмотрении случайной сети со средним числом связей, лежащем в диапазоне от 3,80 до 7,27, можно обратиться к рис. 3, на котором представлены зависимости среднего размера кластеров исключенных узлов от вероятности Q_i для различных сетей. Легко заметить, что произвольная сеть со средним числом связей 5,72 (кривая *3*, см. рис. 3) близка к треугольной сети (среднее число связей 5,86, кривая *2*, см. рис. 3), а произвольная сеть со средним числом связей 4,79 (кривая *4*, см. рис. 3) близка к квадратной решетке (среднее число связей 3,93, кривая *5*, см. рис. 3), произвольная сеть со средним числом связей 3,80 (кривая *6*, см. рис. 3) к шестиугольной (среднее число связей 2,95, кривая *7*, см. рис. 3).

Таким образом, если для случайной структуры с произвольным распределением связей известно среднее число приходящихся на один узел связей, то это позволяет сделать предположение, к какой из известных регулярных структур по своим перколяционным свойствам можно отнести данную сеть, что существенно упрощает ее описание и обеспечение надежности управления передачей данных.

Выводы. Результаты численного моделирования показывают, что сети с топологией случайного дерева Кэйли, состоящие из конечного числа узлов, оказываются идентичными по своим перколяционным свойствам структурам, имеющим топологию регулярной сети Кэйли. Увеличение числа возможных связей для одного узла в сетях Кэйли не изменяет их общего среднего значения, так как доля узлов, находящихся на границах сети и имеющих только по одной связи с соседями увеличивается таким образом, что среднее значение числа связей всегда стремится к пределу, равному 2. В нерегулярных структурах с множеством путей между узлами увеличение среднего числа связей приводит к тому, что образование больших кластеров перегруженных узлов начинается при больших значениях вероятности Q_i исключения узла из работы. Кроме того, при увеличении среднего числа связей при фиксированном значении Q_i наблюдается снижение числа областей перегруженных узлов.

Таким образом, использование методов математического моделирования позволяет проанализировать динамику процессов стохастической обработки заявок в узлах ИВС и определить зависимость вероятности Q_i достижения узлом перегруженного состояния (критического порога L обрабатываемых заявок) от текущего значения входных и выходных потоков и времени процесса. Значения Q_i могут быть использованы для описания передачи данных в ИВС с позиций теории перколяции на уровне, учитывающем топологию всей сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаренко С. И. Анализ математического аппарата расчета качества обслуживания информационно-вычислительной сети на сетевом уровне эталонной модели взаимодействия открытых систем // Сб. науч. тр. VII Всерос. конф. молодых ученых по матем. моделир. и информац. технологиям. – Красноярск, 2006.
2. Турко С. А., Фомин Л. А., Будко П. А., Гахова Н. Н., Ватага А. И. Об оптимальном использовании сглаживающего влияния буферов на параметры трафика Ш-ЦСИС // Электросвязь. – 2002. – № 10. – С. 26–29.
3. Иванов А. В. Разработка и исследование алгоритмов прогнозирования и управления очередями в компьютерных сетях: Автореф. дис. канд. техн. наук / СПбГТУ, 2001.
4. Пороцкий С. Моделирование алгоритма маршрутизации транспортной АТМ сети // Электросвязь. – 2000. – № 10. – С. 16–19.
5. Будко П. А., Федоренко В. В. Управление в сетях связи. Математические модели и методы оптимизации: монография. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2003. – 228 с.
6. Белман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений: Сб. переводов / Под ред. И.Ф. Шахнова. – М.: Мир, 1976. – С. 173–215.
7. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 316 с.
8. Пасечников И. И. Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей. Монография. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 216 с.
9. Городецкий А. Я., Заборовский В. С. Информатика. Фрактальные процессы в компьютерных сетях: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. – 102 с.

Статья поступила в редакцию 25.05.2008

Антон Сергеевич Алёшкин родился в 1982 г. Окончил Московский государственный университет приборостроения и информатики в 2005 г. Автор 40 научных работ в области информационных технологий.

A.S. Alyoshkin (b. 1982) graduated from the Moscow State University for Instrument Engineering and Information Technology in 2005. Author of 40 publications in the field of information technologies.

Анастасия Владимировна Савостьянова родилась в 1988 г. Студентка факультета информатики Московского государственного университета приборостроения и информатики. Автор 24 научных работ в области нанотехнологии и информационных технологий.

A.V. Savost'yanova (b. 1988) — student of the Moscow State University for Instrument Engineering and Information Technology. Author of 24 publications in the field of nanotechnology and information technologies.

Дмитрий Олегович Жуков родился в 1965 г., окончил МХТИ им. Д.И. Менделеева в 1988 г. и МГУ им. М.В. Ломоносова в 1995 г. Д-р техн. наук, профессор, директор центра новых информационных технологий Московского государственного университета приборостроения и информатики. Автор 122 научных работ в области информационных технологий и повышения качества образования.

D.O. Zhukov (b. 1965) graduated from the Mendeleev Moscow Chemical and Technological Institute in 1988 and the Lomonosov Moscow State University in 1995. D. Sc. (Eng.), professor, director of center of new technologies of the Moscow State University for Instrument.
