

УДК 531. 383

С. А. Черников, Ли Мин
**АКТИВНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ
РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Рассмотрена возможность повышения эффективности динамического гасителя колебаний гироскопической системы в результате введения дополнительно к пассивной еще и активной обратной связи по относительному движению упругоприсоединенной к объекту демпфирования инерционной массы. Эффективности активного и пассивного гасителей колебаний сопоставлены.

Известно [1, 2], что динамические гасители колебаний являются одними из наиболее эффективных виброзащитных средств, способных подавлять вынужденные колебания гироскопических систем (ГС) с ярко выраженными резонансными свойствами [3–6]. Однако эффективность гасителя существенно зависит от отношения масс (моментов инерции) гасителя и объекта демпфирования. При малой массе гасителя полоса гашения колебаний оказывается весьма узкой. Кроме того, появляется опасность возникновения резонанса на собственных частотах системы, связанная с блужданием частоты внешнего воздействия в непосредственной близости от частоты настройки гасителя под действием факторов случайного характера.

В работе [6] рассмотрена возможность повышения эффективности динамического гасителя моногармонических колебаний ГС путем изменения его структуры в зависимости от частоты внешнего воздействия. Однако возможности пассивной виброзащиты ГС с широким спектром возмущающих воздействий весьма ограничены.

Сущность идеи [7] улучшения динамических характеристик инерционно-демпфируемых ГС (расширение полосы гашения моногармонических колебаний, уменьшение амплитуды колебаний при полигармонических возмущениях) состоит в том, что дополнительно к пассивной вводится еще и активная обратная связь по относительному позиционному и скоростному (по углу и угловой скорости закручивания) движению упругоприсоединенной инерционной массы.

Далее будет рассмотрена эффективность гашения резонансных колебаний ГС динамическим гасителем с активной обратной связью как при моногармонических, так и при полигармонических воздействиях и оптимальных параметрах гасителя (оптимизация осуществляется

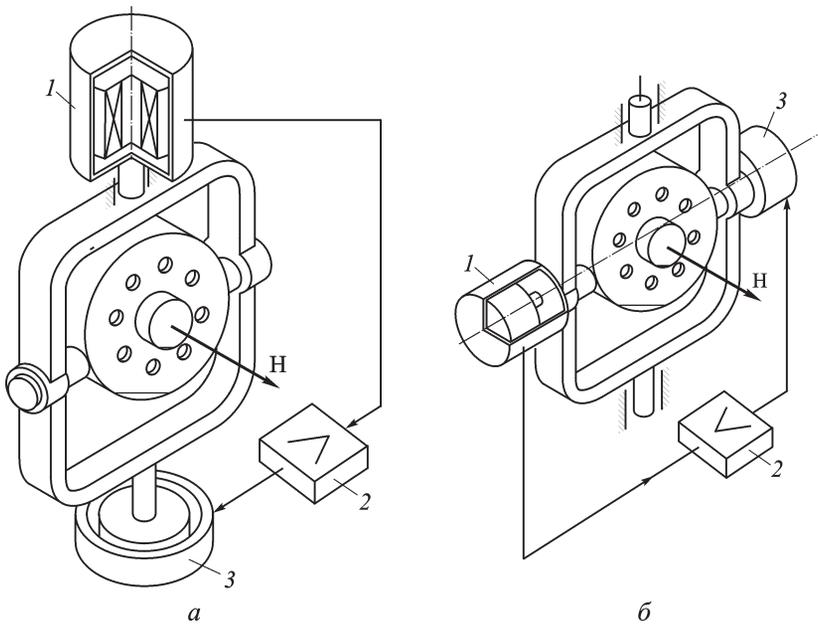


Рис. 1. Кинематические схемы ГС с динамическими гасителями колебаний с активной обратной связью:

1 – ДГК с датчиком угла; 2 – усилитель-преобразователь; 3 – датчик момента

по критерию минимума максимального значения АЧХ функции податливости). Критерием эффективности при этом служит минимум динамического коэффициента поглощения колебаний. В качестве объекта демпфирования рассмотрим механическую часть ГС с ярко выраженными резонансными свойствами. На одной из осей карданова подвеса установлен динамический гаситель колебаний (ДГК) с активной обратной связью, состоящей из датчика угла, усилителя-преобразователя и датчика момента (рис. 1).

Уравнения, описывающие малые движения абсолютно жесткой ГС с активным динамическим гасителем для двух случаев его установки (рис. 1, *а* и *б*), можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} + (\mu + h)(\dot{\alpha} - \dot{\gamma}) + (C_2 + K_2)(\alpha - \gamma) = M_\alpha; \\ B\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} = M_\beta; \\ I\ddot{\gamma} - \mu(\dot{\alpha} - \dot{\gamma}) - C_2(\alpha - \gamma) = M_\gamma \end{cases} \quad (1)$$

– для схемы, изображенной на рис. 1, *а*;

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} = M_\alpha; \\ B\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} + (\mu + h)(\dot{\beta} - \dot{\gamma}) + (C_2 + K_2)(\beta - \gamma) = M_\beta; \\ I\ddot{\gamma} - \mu(\dot{\beta} - \dot{\gamma}) - C_2(\beta - \gamma) = M_\gamma \end{cases} \quad (2)$$

– для схемы, см. рис. 1, *б*.

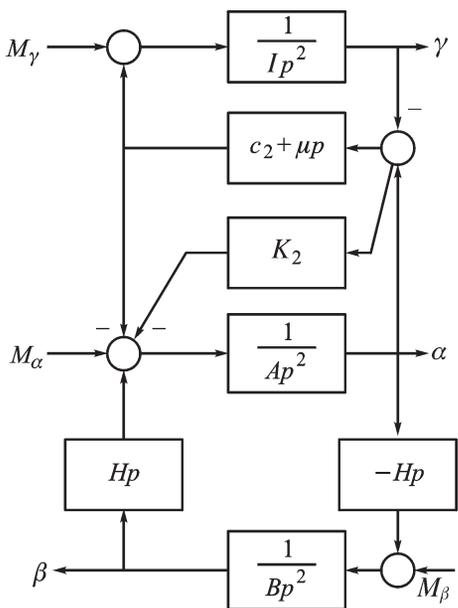


Рис. 2. Структурная схема ГС, соответствующая уравнениям (1)

Здесь A, B и α, β — приведенные моменты инерции и углы поворота ГС относительно наружной и внутренней осей соответственно; I, γ — момент инерции и угол поворота маховика (инерционной массы) демпфера относительно оси, на которой он установлен; H — кинетический момент гироскопа; C_2 и μ — коэффициенты упругой и диссипативной связи ГС с инерционной массой; K_2 и h — коэффициенты активной обратной связи по углу и угловой скорости закручивания; $M_\alpha, M_\beta, M_\gamma$ — внешние моменты относительно соответствующих осей.

Структурная схема (см. рис. 1, а), соответствующая уравнениям (1), приведена на рис. 2.

Исключая из уравнений (1) координату β , а из уравнений (2) — координату α , получаем уравнения механических аналогов динамических свойств гиросистем относительно осей, на которых установлен демпфер. Динамические модели механических аналогов ГС показаны на рис. 3.

Вначале рассмотрим случай, когда демпфер установлен на оси наружной рамки (для гиросtabilизатора — на оси стабилизации).

Запишем уравнения (1) в векторно-матричной форме:

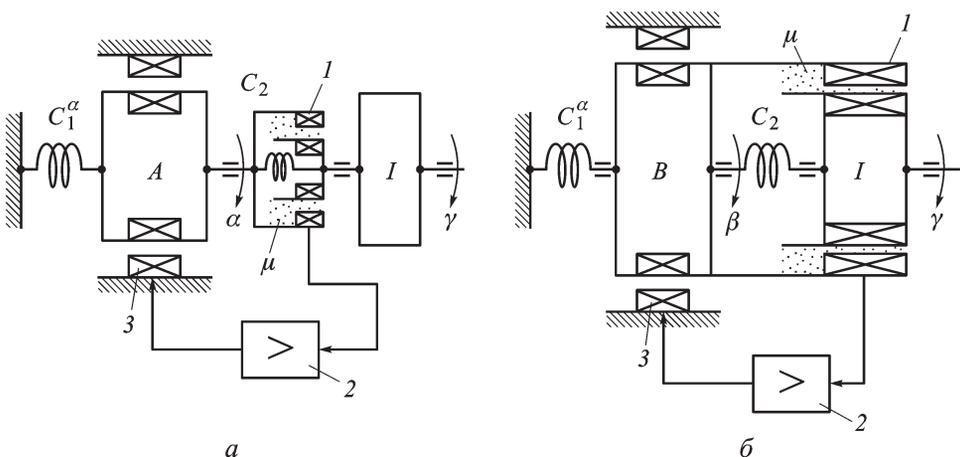


Рис. 3. Механические аналоги динамических свойств ГС:

а и б — см. соответственно рис. 1, а и б

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap^2 + (\mu + h)p + C_2 + K_2 & -Hp & -(\mu + h)p - (C_2 + K_2) \\ Hp & Bp^2 & 0 \\ -\mu p - C_2 & 0 & Ip^2 + \mu p + C_2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \\ M_\gamma \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Осуществляя процедуру обращения матрицы, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_\alpha^\alpha(p) & \Phi_\beta^\alpha(p) & \Phi_\gamma^\alpha(p) \\ \Phi_\alpha^\beta(p) & \Phi_\beta^\beta(p) & \Phi_\gamma^\beta(p) \\ \Phi_\alpha^\gamma(p) & \Phi_\beta^\gamma(p) & \Phi_\gamma^\gamma(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \\ M_\gamma \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для определенности принимаем, что интересующими нас элементами матрицы передаточных функций податливости являются следующие:

$$\Phi_\alpha^\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{M_\alpha(p)} = \frac{p^2 + \frac{\mu}{I}p + \nu_2^2}{A\Delta(p)}; \quad (5)$$

$$\Phi_\alpha^\beta(p) = \frac{\beta(p)}{M_\alpha(p)} = \frac{-\nu_1^2 \left(p^2 + \frac{\mu}{I}p + \nu_2^2 \right)}{Hp\Delta(p)}; \quad (6)$$

$$\Phi_\beta^\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{M_\beta(p)} = \frac{\nu_1^2 \left(p^2 + \frac{\mu}{I}p + \nu_2^2 \right)}{Hp\Delta(p)}; \quad (7)$$

$$\Phi_\beta^\beta(p) = \frac{\beta(p)}{M_\beta(p)} = \frac{p^2 + \frac{\mu}{I}(1 + \chi_0)p + \nu_2^2(1 + \chi_K)}{B\Delta(p)}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \frac{\Delta_0(p)}{ABIp^2} = \\ &= p^4 + \frac{\mu}{I}(1 + \chi_0)p^3 + [\nu_1^2 + \nu_2^2(1 + \chi_K)]p^2 + \frac{\mu}{I}\nu_1^2p + \nu_1^2\nu_2^2; \end{aligned} \quad (9)$$

$\Delta_0(p)$ – главный определитель системы (3); $\nu_1 = H/\sqrt{AB}$ и $\nu_2 = \sqrt{C_2/I}$ – парциальные частоты объекта демпфирования и пассивного демпфера; $\chi_K = \chi(1 + K_2/C_2)$; $\chi_0 = \chi(1 + h/\mu)$; $\chi = I/A$ – для схемы, приведенной на рис. 1, а; $\chi = I/B$ – для схемы, см. рис. 1, б.

Логично предположить, что демпфер, установленный на наружной оси карданова подвеса, подавляет угловые колебания ГС относительно-

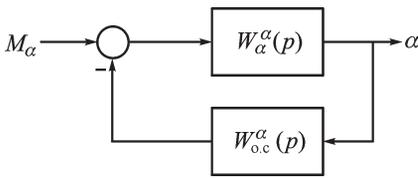


Рис. 4. Структурная схема ГС с активным динамическим гасителем

но наружной оси, например колебания стабилизированной площадки гиросtabilизатора.

Тогда исходную передаточную функцию податливости при $\mu=h=0$ можно записать в виде

$$\Phi_{\alpha}^{\alpha}(p) = \frac{p^2 + \nu_2^2}{A(p^2 + \omega_{01}^2)(p^2 + \omega_{02}^2)}. \quad (10)$$

Здесь собственные (резонансные) частоты ω_{01} и ω_{02} определяются формулой

$$\omega_{01,02}^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2(1 + \chi_K) \pm \sqrt{[\nu_1^2 + \nu_2^2(1 + \chi_K)]^2 - 4\nu_1^2\nu_2^2}}{2}, \quad (11)$$

а антирезонансная частота равна парциальной частоте гасителя ν_2 .

Если в выражениях (5)–(11) заменить χ_K и χ_0 на χ , т.е. положить $K_2 = 0$ и $h = 0$, то получаем соответствующие выражения для ГС с пассивным демпфером.

Приведем ГС с активным демпфером к виду системы с обратной связью в соответствии с рис. 4, где

$$W_{\alpha}^{\alpha}(p) = \frac{\alpha(p)}{M_{\alpha}(p)} = \frac{1}{A(p^2 + \nu_1^2)} \quad (12)$$

— передаточная функция объекта демпфирования;

$$W_{o.c.}^{\alpha}(p) = \frac{p^2(C_2 + K_2 + (\mu + h)p)}{p^2 + \frac{\mu}{I}p + \nu_2^2} \quad (13)$$

— передаточная функция суммарной обратной связи (активной и пассивной).

Введение активной обратной связи эквивалентно увеличению момента инерции присоединенной массы в $(1 + K_2/C_2)$ раз и проявляется в изменении (в нужном направлении) собственных (резонансных) частот ГС, не влияя при этом на ее антирезонансные свойства, поскольку нули передаточных функций податливости (5)–(7), определяемые полюсами обратной связи, зависят только от параметров пассивного демпфера. При этом чем меньше коэффициент вязкого трения μ , тем ярче выражены антирезонансные свойства ГС. При $\mu = 0$ система имеет астатизм по отношению к гармоническому возмущению, если полюс его изображения совпадает с полюсом обратной связи, которая соответствующим образом может быть настроена.

Пользуясь структурной схемой (см. рис. 4) передаточную функцию податливости $\Phi_{M_\alpha}^\alpha(\rho)$ запишем в следующем виде:

$$\Phi_\alpha^\alpha(p) = \frac{W_\alpha^\alpha(p)}{1 + W_\alpha^\alpha(p) W_{o.c}^\alpha(p)} = \Phi_*(p) W_\alpha^\alpha(p), \quad (14)$$

где

$$\Phi_*(p) = \frac{1}{1 + W_\alpha^\alpha(p) W_{o.c}^\alpha(p)} \quad (15)$$

— динамический коэффициент подавления колебаний.

Поскольку структура ГС с активным демпфером задана заранее, то задача оптимального синтеза системы сводится к определению оптимальных параметров демпфера. Критерий оптимизации — это минимум максимального значения АЧХ податливости в месте установки демпфера, т.е. $\min \max |\Phi_\alpha^\alpha(j\omega)|$. При этом $\chi = I/A$ считают заданной величиной, выбранной из конструктивных соображений (минимальных массы и габаритных размеров пассивной части демпфера, непосредственно устанавливаемого на объект демпфирования), а χ_K определяется максимально допустимой амплитудой колебаний. Мету виброизоляции будем оценивать динамическим коэффициентом подавления колебаний, характеризующим отношение амплитуды вынужденных колебаний замкнутой системы с гасителем к амплитуде колебаний системы без гасителя (объекта демпфирования):

$$|\Phi_*(j\omega)| = \frac{|\Phi_\alpha^\alpha(j\omega)|}{|W_\alpha^\alpha(j\omega)|}.$$

Если полосу гашения определить как диапазон частот, в котором $|\Phi_*(j\omega)| \leq 1$, или, что то же самое,

$$|1 + W_=(j\omega)| \geq 1,$$

где $W_=(p) = W_\alpha^\alpha(p) W_{o.c}^\alpha(p)$ — передаточная функция разомкнутой цепи, то в полосе гашения АФХ разомкнутой цепи системы с гасителем

$$W_=(j\omega) = W_\alpha^\alpha(j\omega) W_{o.c}^\alpha(j\omega) \quad (16)$$

не должна заходить в круг единичного радиуса с центром в точке $(-1, j \cdot 0)$ [8]. Граничные частоты полосы гашения Ω_1 и Ω_2 определяются условием

$$|1 + W_=(j\omega)| = 1 \quad (17)$$

или точками пересечения $W_=(j\omega)$ и упомянутой окружности. Поскольку на этих частотах амплитуды вынужденных колебаний системы без демпфера и с демпфером одинаковы, то логично назвать их инвариантными по отношению к цепи обратной связи.

Учитывая уравнения (12) и (13), запишем выражение для передаточной функции разомкнутой цепи:

$$W_{\neq}(p) = \frac{p^2 \left(\nu_2^2 \chi_K + \frac{\mu}{I} \chi_0 p \right)}{(p^2 + \nu_1^2) \left(p^2 + \frac{\mu}{I} p + \nu_2^2 \right)}. \quad (18)$$

Далее, подставляя уравнение (18) в выражение (15), получаем

$$\Phi_*(p) = \frac{(p^2 + \nu_1^2) \left(p^2 + \frac{\mu}{I} p + \nu_2^2 \right)}{(p^2 + \nu_1^2) \left(p^2 + \frac{\mu}{I} p + \nu_2^2 \right) + p^2 \nu_2^2 \chi_K + p^3 \frac{\mu}{I} \chi_0}.$$

При $\mu = h = 0$

$$\Phi_*(j\omega) = \frac{(\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2)}{(\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2) - \nu_2^2 \chi_K \omega^2}.$$

Подставляя в условие (17) значение $W_{\neq}(j\omega)$ из выражения (18), получаем при $\mu = h = 0$ выражения для частот, инвариантных по отношению к цепи обратной связи:

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2(1 + \chi_K/2) \pm \sqrt{[\nu_1^2 + \nu_2^2(1 + \chi_K/2)]^2 - 4\nu_1^2 \nu_2^2}}{2}. \quad (19)$$

Оптимальная настройка демпфера определяется условием равенства АЧХ в инвариантных точках

$$|\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_1)| = |\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_2)|,$$

или, что то же самое,

$$|W_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_1)| = |W_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_2)|, \quad (20)$$

поскольку $|\Phi_*(j\Omega_{1,2})| = 1$.

Подставляя в равенство (20) значения Ω_1 и Ω_2 из (19), получаем выражение для парциальной частоты ν_2 при оптимальной настройке демпфера:

$$\nu_2^* = \frac{\nu_1}{\sqrt{1 + \chi_K/2}}. \quad (21)$$

Инвариантные частоты при этом будут соответственно равны

$$(\Omega_{1,2}^2)^* = \nu_1^2 \left(1 \mp \sqrt{\frac{\chi_K}{2 + \chi_K}} \right), \quad (22)$$

а полоса гашения, где $|\Phi_*(j\omega)| \leq 1$, будет определяться их разностью

$$\Delta\Omega = \Omega_2^* - \Omega_1^* = \nu_1 \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\chi_K}{2 + \chi_K}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\chi_K}{2 + \chi_K}}} \right). \quad (23)$$

При этом в полосе гашения

$$\min \max |\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\omega)| = |\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_{1,2}^*)| = \Phi_{\alpha}^{\alpha}(0) \sqrt{1 + \frac{2}{\chi_K}}. \quad (24)$$

Отношение максимума АЧХ податливости в зоне гашения к статической податливости определяется коэффициентом максимального усиления податливости

$$N = |\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_{1,2}^*)| / \Phi_{\alpha}^{\alpha}(0) = \sqrt{1 + \frac{2}{\chi_K}}. \quad (25)$$

Полагая в формулах (21)–(25) $K_2 = 0$ или $\chi_K = \chi$, получаем известные формулы для пассивного демпфера при его оптимальной настройке. Как видно, эффективность демпфирования как пассивным, так и активным демпфером определяется исключительно коэффициентами χ и χ_K , т.е. отношениями моментов инерции гасителя и объекта демпфирования. Оценить эффективность активного гасителя по сравнению с пассивным можно, например, отношением коэффициентов максимального усиления АЧХ

$$\frac{N}{N_0} = \sqrt{\frac{1 + 2/\chi_K}{1 + 2/\chi}}; \quad (26)$$

здесь $N_0 = \sqrt{1 + 2/\chi}$ – коэффициент максимального усиления АЧХ для пассивного гасителя.

Поскольку $\chi_K = \chi(1 + K_2/C_2)$ (введение активной обратной связи эквивалентно увеличению в $(1 + K_2/C_2)$ раз) момента инерции гасителя, то эффективность активного демпфирования существенно повышается.

Если полосу гашения определить частотами $\Omega_{1\mu}$ и $\Omega_{2\mu}$, инвариантными по отношению к вязкому трению, то демпфер настраивается по условию равенства АЧХ в инвариантных точках:

$$|\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_{1\mu})| = |\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_{2\mu})|. \quad (27)$$

При этом частоты $\Omega_{1\mu}$ и $\Omega_{2\mu}$ определяются условием

$$|\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\omega)|_{\mu=0} = |\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\omega)|_{\mu=\infty}. \quad (28)$$

Запишем $\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\omega)$ в следующем виде:

$$\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\omega) = \frac{a + j\frac{\mu}{I}b\omega}{c + j\frac{\mu}{I}d\omega}, \quad (29)$$

где a , $\frac{\mu}{I}b\omega$, c , $\frac{\mu}{I}d\omega$ – вещественные и мнимые части числителя и знаменателя $\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\omega)$, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned}
 a &= \nu_2^2 - \omega^2; \\
 b &= 1; \\
 c &= A[\omega^4 - (\nu_1^2 + \nu_2^2(1 + \chi_K))\omega^2 + \nu_1^2\nu_2^2]; \\
 d &= A[\nu_1^2 - (1 + \chi_0)\omega^2].
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Тогда условие (28) для нахождения частот, инвариантных по отношению к вязкому трению, можно записать в виде

$$a d + b c = 0. \tag{31}$$

Решая уравнение (31) относительно частоты, получаем

$$\begin{aligned}
 (\Omega_{1,2}^2)_\mu &= \\
 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 \left(1 + \frac{\chi + \chi_K}{2}\right) \pm \sqrt{\left[\nu_1^2 + \nu_2^2 \left(1 + \frac{\chi + \chi_K}{2}\right)\right]^2 - 4\nu_1^2\nu_2^2 \left(1 + \frac{\chi}{2}\right)}{2 + \chi}.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Условие оптимальной настройки демпфера (27) принимает вид

$$\frac{b(\Omega_{1\mu})}{d(\Omega_{1\mu})} = -\frac{b(\Omega_{2\mu})}{d(\Omega_{2\mu})}. \tag{33}$$

Из равенства (33) с учетом выражения (32) получаем оптимальное значение парциальной частоты демпфера

$$\nu_{2\mu}^* = \nu_1 \frac{1}{\sqrt{(1 + \chi) \left(1 + \frac{\chi + \chi_K}{2}\right)}}. \tag{34}$$

Инвариантные частоты при этом определяются формулами

$$(\Omega_{1,2}^2)_\mu^* = \frac{\nu_1^2}{1 + \chi} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{2(1 + \chi)}{(2 + \chi) \left(1 + \frac{\chi + \chi_K}{2}\right)}} \right). \tag{35}$$

Подставляя в условие (33) значения инвариантных частот (35), соответствующих оптимальной настройке, получаем искомый минимум максимального значения АЧХ в полосе гашения ($\Omega_{1\mu} \leq \omega \leq \Omega_{2\mu}$):

$$\min \max |\Phi_\alpha^\alpha(j\omega)| = \Phi_\alpha^\alpha(0) \sqrt{\frac{2 + \chi}{\chi} \frac{2 + \chi + \chi_K}{2\frac{\chi_K}{\chi} + \chi + \chi_K}}, \tag{36}$$

где $\Phi_\alpha^\alpha(0) = 1/C_1$.

Коэффициент максимального усиления податливости

$$N_{\mu} = \frac{|\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\Omega_{1,2})_{\mu}|}{\Phi_{\alpha}^{\alpha}(0)} = \sqrt{\frac{2+\chi}{\chi}} \sqrt{\frac{2+\chi+\chi_K}{2\chi_K/\chi+\chi+\chi_K}}.$$

Здесь первый множитель $\left(\sqrt{\frac{2+\chi}{\chi}}\right)$ определяет коэффициент максимального усиления в случае пассивного демпфера ($\chi_K = \chi$). При $\chi_K \gg \chi$ выражение N_{μ} принимает вид

$$N_{\mu} = \sqrt{1 + \frac{2}{\chi_K}}. \quad (37)$$

Сравнивая оптимальные частоты настройки демпфера ν_2^* и $\nu_{2\mu}^*$ (см. уравнения (21) и (34)), выявили, что их различие несущественно. При $\chi_K \gg \chi$ и $\chi \ll 1$, что имеет место в случае активного демпфирования,

$$\nu_{2\mu}^* \approx \nu_2^* = \nu_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\chi_K}{2}}}.$$

При этом инвариантные частоты Ω_i^* и $\Omega_{i\mu}^*$ ($i = 1, 2$), определяющие полосу гашения, различаются не более чем на 1%. И, наконец, коэффициенты максимального усиления податливости N и N_{μ} (см. уравнения (25) и (37)) одинаковы.

Таким образом, оба алгоритма настройки демпфера практически равноценны и в одинаковой степени могут быть использованы при оптимизации его параметров. Коэффициент активной обратной связи K_2 выбирается из условия заданного допустимого коэффициента усиления АЧХ податливости N_+ . Подставляя в уравнение (25) значение χ_K из выражения (9) и решая полученное уравнение относительно K_2 , получаем

$$K_2 \geq \frac{C_1}{N_+^2} (2 - \chi(N_+^2 - 1)); \quad C_1 = \frac{H^2}{B}.$$

С целью обеспечить устойчивость ГС с активной обратной связью, исключить возможность возникновения резонанса на собственных частотах системы, связанной с блужданием частоты внешнего воздействия в непосредственной близости от частоты настройки, а также с целью придать гасителю свойства полигармонического демпфера, введем диссипативные пассивные и активные связи.

Рассматривая при этом демпфирование как фактор, дающий дополнительные возможности оптимизации динамических характеристик ГС, найдем оптимальное значение μ^* , как среднее между параметрами μ_{1*} и μ_{2*} , определяющее максимумы АЧХ податливости в

инвариантных точках Ω_1 и Ω_2 соответственно. Иными словами μ_{1*} и μ_{2*} определяются соответственно условиями

$$\left[\frac{\partial |\Phi_\alpha^\alpha(j\omega)|}{\partial \omega} \right]_{\omega=\Omega_{1*}} = 0; \quad \left[\frac{\partial |\Phi_\alpha^\alpha(j\omega)|}{\partial \omega} \right]_{\omega=\Omega_{2*}} = 0. \quad (38)$$

Дифференцируя $\Phi_\alpha^\alpha(j\omega)$, представленную в виде выражения (29), а также учитывая, что в инвариантных точках $a/c = -b/d$, и решая уравнения (38) относительно μ , получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_{1*}}{I} \right)^2 &= \frac{a_1 \left(a'_1 + \frac{b_1}{d_1} c'_1 \right)}{b_1 \left(-b'_1 + \frac{b_1}{d_1} d'_1 \right) \Omega_{1*}^2}; \\ \left(\frac{\mu_{2*}}{I} \right)^2 &= \frac{a_2 \left(a'_2 - \frac{b_2}{d_2} c'_2 \right)}{b_2 \left(-b'_2 - \frac{b_2}{d_2} d'_2 \right) \Omega_{2*}^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь нижние индексы 1 и 2 определяют значения вещественных и мнимых частей уравнений и их производных по ω в точках Ω_{1*} и Ω_{2*} соответственно:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \nu_1^2 - \Omega_{1,2}^{*2}; \\ b_{1,2} &= 1; \\ c_{1,2} &= A[\Omega_{1,2}^{*4} - (\nu_1^2 + \nu_2^2(1 + \chi_K))\Omega_{1,2}^{*2} + \nu_1^2\nu_2^2]; \\ d_{1,2} &= A[\nu_1^2 - (1 + \chi)\Omega_{1,2}^{*2}]; \\ a'_{1,2} &= -1; \quad b'_{1,2} = 0; \quad c'_{1,2} = A[2\Omega_{1,2}^{*2} - \nu_1^2 - \nu_2^2(1 + \chi_K)]; \\ d'_{1,2} &= -A(1 + \chi). \end{aligned} \quad (40)$$

Учитывая уравнения (40), выражения для оптимальных коэффициентов вязкого трения окончательно запишем в виде

$$\begin{aligned} \mu_{1*}^2 &= \frac{I^2\nu_1^2(\lambda - f_1)[(1 + \lambda(1 + \chi_K) - 2f_1)N + 1]}{N(1 + \chi)f_1}; \\ \mu_{2*}^2 &= \frac{I^2\nu_1^2(\lambda - f_2)[(1 + \lambda(1 + \chi_K) - 2f_2)N - 1]}{N(1 + \chi)f_2}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\lambda = \nu_{2*}^2/\nu_1^2$; $f_1 = \Omega_{1*}^2/\nu_1^2$; $f_2 = \Omega_{2*}^2/\nu_1^2$. Полагая в уравнениях (41) $\chi_K = \chi$, получаем известное [6] выражение для оптимальных коэффициентов демпфирования в случае пассивного демфера:

$$\mu_{1,2*}^2 = \frac{I^2\nu_1^2 \left(3 \mp \sqrt{\frac{\chi}{2 + \chi}} \right) \chi}{2(1 + \chi)^3}.$$

Это же выражение для μ_* справедливо и в случае активной формирующей связи (позиционной и скоростной) при замене χ на χ_K и условии $\chi_0 = \chi_K$.

В качестве примера на рис. 5 приведены относительные АЧХ податливости ГС, описываемой уравнениями (1), с активным динамическим гасителем колебаний и следующими параметрами:

$$A = 100 \quad B = 10^3 \text{ г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2; \quad H = 10^4 \text{ г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}; \quad \chi = 0,01; \quad K_2 = 50 C_2.$$

Здесь же для сравнения построены АЧХ ГС с пассивным динамическим гасителем (см. штриховые кривые). В обоих случаях параметры

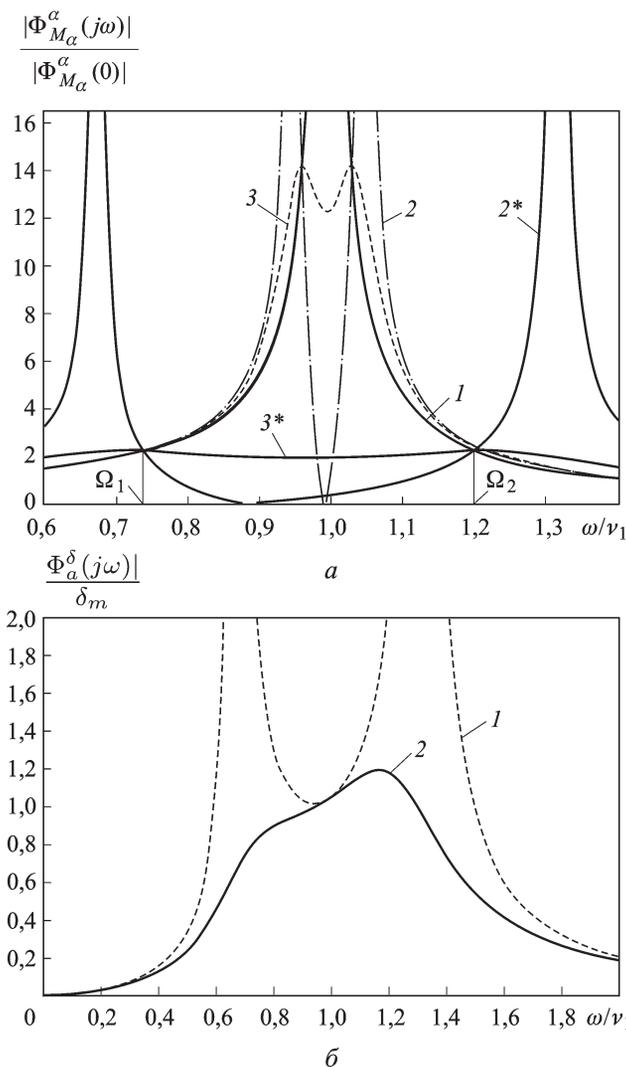


Рис. 5. Относительные АЧХ податливости ГС с динамическим гасителем (а) и угла закручивания вокруг оси стабилизации (б): 1 – без гасителя; 2 и 2* – с пассивным и активным гасителем при $\mu = 0$; 3 и 3* – с пассивным и активным гасителем при $\mu = \mu_*$

гасителя соответствуют оптимальной настройке. При этом кривые 1 характеризуют объект демпфирования, кривые 2 отвечают характеристикам ГС с оптимальной настройкой гасителя ($\nu_{2\mu} = \nu_{2\mu}^*$) при $\mu = 0$, кривые 3 — характеристикам ГС с оптимальной настройкой гасителя и оптимальным коэффициентам вязкого трения $\mu = \mu_*$. Как видно, введение активной обратной связи существенно расширяет полосу гашения колебаний и уменьшает их амплитуду. При этом коэффициент максимального усиления податливости $N = 2,2$, в то время как для пассивного демпфера $N_0 = 14,2$.

Важной характеристикой системы с активной виброзащитой является угол закручивания $\delta = \alpha - \gamma$, подлежащий измерению и определяемый следующей передаточной функцией:

$$\Phi_{\alpha}^{\delta}(p) = \frac{\delta(p)}{M_{\alpha}(p)} = \frac{p^2}{A \Delta(p)},$$

где $\Delta(p)$ — характеристический полином (9).

На рис. 5, б для ГС с параметрами, принятыми ранее, построены относительные АЧХ $|\Phi_{\alpha}^{\delta}(j\omega)| / \delta_m$ для $\mu = 0$ (кривая 1) и $\mu = \mu_*$ (кривая 2). Здесь $\delta_m = |\Phi_{\alpha}^{\delta}(j\omega_m)|$ — минимальное значение АЧХ в межрезонансном диапазоне при $\mu = 0$. При этом частота, соответствующая экстремуму $\frac{\partial |\Phi_{\alpha}^{\delta}(j\omega)|}{\partial \omega} = 0$, определяется выражением $\omega_m = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$.

При оптимальной настройке демпфера

$$\delta_m = \frac{1}{C_1} \frac{1 + \chi_K/2}{2 \left(1 + \frac{3}{4} \chi_K - \sqrt{1 + \chi_K/2} \right)}.$$

Важно отметить, что экстремальная точка $|\Phi_{\alpha}^{\delta}(j\omega_m)|$ является инвариантной по отношению к вязкому трению.

Поскольку динамические гасители обладают локальным эффектом, т.е. понижают виброактивность объекта в местах установки гасителя (в рассматриваемом случае улучшаются характеристики $|\Phi_{\alpha}^{\alpha}(j\omega)|$), а в других местах виброактивное состояние объекта может даже ухудшиться, то необходимо рассмотреть и другие элементы матрицы податливости (4). Например, для гироскопического интегратора линейных ускорений особый интерес представляет передаточная функция $\Phi_{\beta}^{\beta}(p)$, характеризующая виброактивность ГС по углу β под действием периодического момента относительно оси внутренней рамки.

Оценивая эффективность демпфирования динамическим коэффициентом подавления колебаний, запишем передаточную функцию податливости $\Phi_{\beta}^{\beta}(p)$ (см. (8)) в следующем виде:

$$\Phi_{\beta}^{\beta}(p) = \Phi_{*}^{\beta}(p) W_{\beta}^{\beta}(p), \quad (42)$$

где

$$W_{\beta}^{\beta}(p) = \frac{1}{Bt(p^2 + \nu_1^2)} \quad (43)$$

— передаточная функция объекта демпфирования;

$$\Phi_{*}^{\beta}(p) = \frac{1}{1 + W_{\beta}^{\beta}(p)} \quad (44)$$

— передаточная функция ДКПК относительно оси внутренней рамки;

$$W_{=}^{\beta}(p) = W_{\beta}^{\beta}(p)W_{o.c.}^{\beta}(p) = R^{\beta}(p)/Q^{\beta}(p) \quad (45)$$

— передаточная функция разомкнутой системы;

$$W_{o.c.}^{\beta}(p) = \frac{1}{\Phi_{\beta}^{\beta}(p)} - \frac{1}{W_{\beta}^{\beta}(p)} = -\frac{B\nu_1^2 \left(\frac{\mu}{I}p + \nu_2^2\chi_K \right)}{p^2 + \frac{\mu}{I}(1 + \chi)p + \nu_2^2(1 + \chi_K)} \quad (46)$$

— передаточная функция цепи обратной связи.

В отличие от $W_{o.c.}^{\alpha}(\rho)$, полюсы передаточной функции цепи обратной связи $W_{o.c.}^{\beta}(p)$ существенно зависят от K_2 , что создает принципиальную возможность построения астатической системы при моногармонических возмущениях путем соответствующей настройки гасителя на частоту внешнего воздействия:

$$K_2 = A[\omega^2 - \nu_2^2(1 + \chi)].$$

Подставляя $W_{=}^{\beta}(p)$ в выражение (44), с учетом соотношений (43) и (46) получаем:

$$\Phi_{*}^{\beta}(p) = Q^{\beta}(p)/\Delta(p),$$

где $\Delta(p)$ — характеристический полином замкнутой системы, определяемый выражением (9);

$$Q^{\beta}(p) = (p^2 + \nu_1^2) \left[p^2 + \frac{\mu}{I}(1 + \chi)p + \nu_2^2(1 + \chi_K) \right]$$

— характеристический полином разомкнутой цепи.

Поскольку $\Phi_{*}(p)$ — отношение характеристических полиномов разомкнутой и замкнутой систем, то отношение динамических коэффициентов $\Phi_{*}^{\beta}(p)/\Phi_{*}^{\alpha}(p)$ определяется отношением характеристических полиномов разомкнутых систем:

$$\Phi_{*}^{\beta}(p)/\Phi_{*}^{\alpha}(p) = Q^{\beta}(p)/Q^{\alpha}(p), \quad (47)$$

а так как последние включают в себя полюсы передаточной функции объекта демпфирования, которые сокращаются, то отношение (47)

определяется отношением полюсов обратных связей:

$$\Phi_*^\beta(p)/\Phi_*^\alpha(p) = Q_{o.c.}^\beta(p)/Q_{o.c.}^\alpha(p) = \frac{p^2 + \frac{\mu}{I}(1 + \chi)p + \nu_2^2(1 + \chi_K)}{p^2 + \frac{\mu}{I}p + \nu_2^2}. \quad (48)$$

Из анализа отношения (48) следует, что при $\chi_K \leq 0,5$ различие ДКПК несущественно.

Увеличение собственной частоты осциллятора обратной связи $W_{o.c.}^\beta(p)$ сопровождается смещением антирезонансной частоты ГС в область более высоких частот, что приводит к опусканию АЧХ $|\Phi_\alpha^\beta(j\omega)|$ по отношению к $|\Phi_\alpha^\alpha(j\omega)|$ в области частот $\omega > \nu_2$. Это свидетельствует о более высокой эффективности гашения колебаний по углу β под действием периодических моментов относительно оси внутренней рамки, т.е. о более жесткой податливости $\Phi_\beta^\beta(p)$ по сравнению с $\Phi_\alpha^\alpha(p)$.

Рассмотрим случай установки демпфера на оси внутренней рамки. Механическая аналогия динамических свойств ГС при ее движении относительно этой оси представлена на рис. 2, б. Из сравнения механических аналогий следует, что передаточные функции податливости $\Phi_\alpha^\alpha(p)_1$ (демпфер установлен на оси наружной рамки (см. рис. 1)) и $\Phi_\beta^\beta(p)_2$ (демпфер установлен на оси внутренней рамки) должны быть идентичны, при замене A на B и B на A , т.е.

$$(\Phi_\beta^\beta(p))_2 = \frac{p^2 + \frac{\mu}{I}p + \nu_2^2}{A \Delta(p)} = (\Phi_\alpha^\alpha(p))_1.$$

Идентичны также и передаточные функции $\Phi_\beta^\beta(p)_1$ и $\Phi_\alpha^\alpha(p)_2$, т.е.

$$\Phi_\alpha^\alpha(p)_2 = \frac{p^2 + \frac{\mu}{I}(1 + \chi)p + \nu_2^2(1 + \chi_K)}{B \Delta(p)} = \Phi_\beta^\beta(p)_1.$$

Таким образом, эффективность демпфирования (по обеим осям) при установке демпфера на разных осях практически одинакова при равных отношениях моментов инерции (равных коэффициентах χ) и равных коэффициентах χ_K . Однако при $B \ll A$ одинаковый эффект гашения колебаний достигается с меньшими конструкционными издержками (энергетическими затратами, массой и габаритными размерами и др.) при установке демпфера на оси внутренней рамки. Тем не менее, вопрос о выборе места установки демпфера должен решаться с учетом не только преимуществ технической реализации, но и влияния вносимых гасителем инструментальных погрешностей на точностные характеристики ГС в целом.

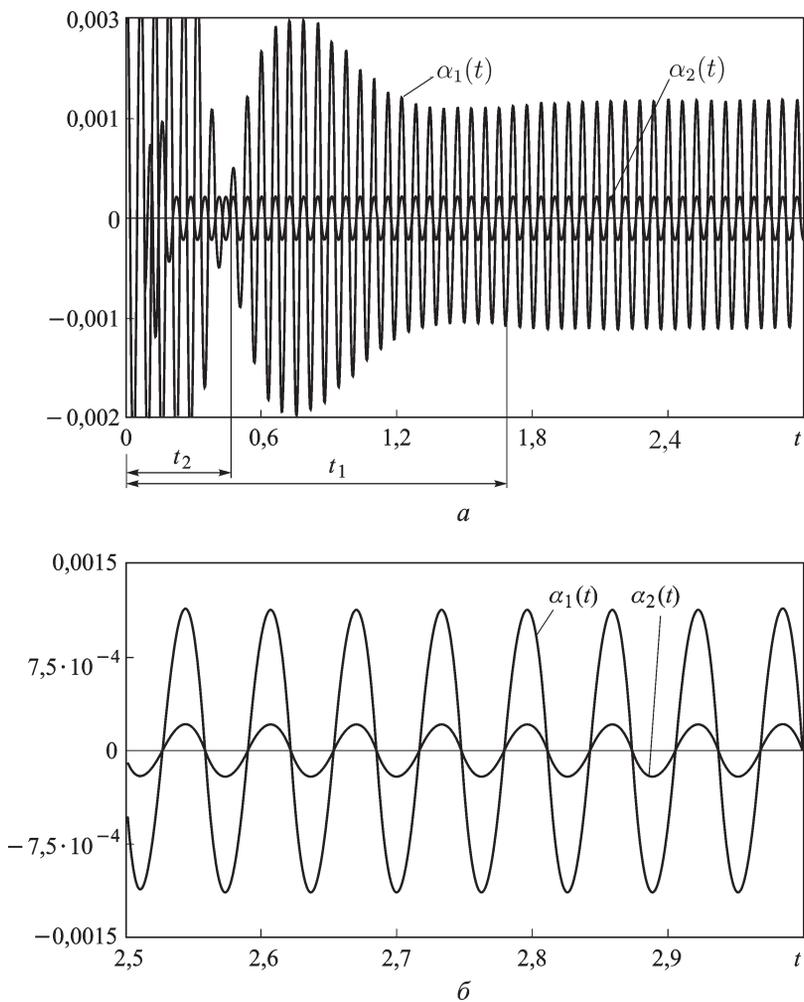


Рис. 6 (начало). Вынужденные колебания относительно наружной оси карданова подвеса ГС с пассивным $\alpha_1(t)$ и активным $\alpha_2(t)$ гасителем при $\mu = \mu_*$ (а, б) и при $\mu = 0$ (в... д)

В заключение приведем некоторые результаты компьютерного моделирования в пакете MATLAB динамики ГС в режиме вынужденных колебаний, описываемой уравнениями (1) с пассивным и активным оптимально настроенными динамическими гасителями. При моделировании приняты следующие параметры ГС:

$$\begin{aligned}
 A = 100B = 10^3 \text{Г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2; \quad H = 10^4 \text{Г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}; \quad \chi = 0,01; \\
 K_2 = 50C_2; \quad C_2 = 7,8579 \cdot 10^4 \text{Г}\cdot\text{см}; \quad \mu_* = 768,2 \text{Г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}; \\
 M_\alpha = a_M \sin(\omega t); \quad M_\beta = M_\gamma = 0; \quad a_M = 10^3 \text{Г}\cdot\text{см}.
 \end{aligned}$$

На рис. 6, а, б приведены вынужденные колебания при $\omega = 100 \text{с}^{-1}$ относительно наружной оси карданова подвеса ГС с пассивным $\alpha_1(t)$ и активным $\alpha_2(t)$ гасителями. Как видно из рисунка, после окончания

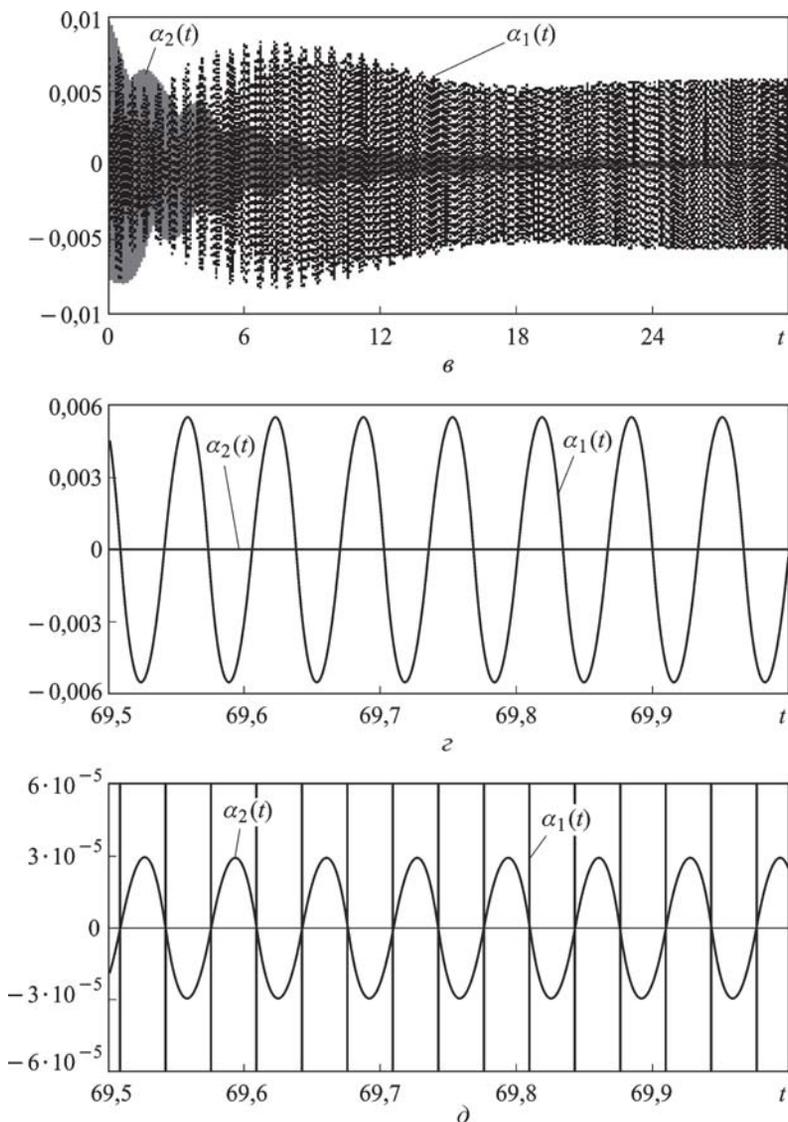


Рис. 6 (окончание)

переходного процесса в системе устанавливаются вынужденные колебания. При этом амплитуда колебаний ГС с активным демпфером в 6,5 раз меньше, чем амплитуда колебаний ГС с пассивным демпфером, кроме того, время переходного процесса ГС с активным демпфером в 5 раз меньше времени переходного процесса ГС с пассивными демпферами. Существенно меньше и величина перерегулирования. На рис. 6, в. . . д показаны недемпфируемые ($\mu = 0$) вынужденные колебания ГС с пассивным $\alpha_1(t)$ и активным $\alpha_2(t)$ динамическим гасителем для случая, когда частота ω внешнего воздействия $M_\alpha = a_M \sin(\omega t)$ отличается от частоты настройки $\nu_2 = \nu_1$ на 5%, при этом учтено сопутствующее трение оси карданова подвеса, так что относительный

коэффициент затухания колебания ГС без гасителя $\xi = 0,001$. Видно, что амплитуда установившихся вынужденных колебаний ГС с активным динамическим гасителем более чем в 100 раз меньше амплитуды установившихся вынужденных колебаний ГС с пассивным гасителем, который характеризуется острой чувствительностью к изменению частоты возмущения по отношению к частоте настройки в отличие от активного демпфера.

Таким образом, динамический гаситель с активной обратной связью позволяет существенно расширить полосу гашения недемпфированных моногармонических колебаний и существенно повысить эффективность подавления демпфированных вынужденных колебаний во всем частотном диапазоне полигармонических возмущающих воздействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коренев Б. Г., Резников Л. М. Динамические гасители колебаний. – М.: Наука, 1988.
2. Елиеев С. В., Волков Л. Н., Кухаренко В. П. Динамика механических систем с дополнительными связями. – Новосибирск: Наука, 1990.
3. Новожилов И. В. Силовой гироскопический стабилизатор с динамическим поглотителем колебаний // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 4.
4. Черников С. А. Инерционное демпфирование систем гироскопической стабилизации // Изв. вузов. Приборостроение. – 1969. – Т. 12, № 8. – С. 66–70.
5. Черников С. А. Динамическая стабилизация недемпфированных упругих гиросистем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 3. – С. 11–19.
6. Черников С. А., Самер-Салек. Демпфирование резонансных колебаний гироскопических систем динамическим гасителем переменной структуры // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. – 2006. – № 4. – С. 111–125.
7. Черников С. А. Динамический поглотитель колебаний с активной обратной связью. Актуальные проблемы российской космонавтики // Труды XXXI академических чтений по космонавтике. – М., 2007.
8. Черников С. А. Динамика систем гироскопической стабилизации. – М.: МО СССР, 1967. – 328 с.

Статья поступила в редакцию 23.01.2008

Сергей Акимович Черников родился в 1931 г., окончил в 1954 г. ВИА им. Ф.Э. Дзержинского. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Академик Российской Академии навигации и управления движением. Автор более 135 научных работ в области гироскопической техники.

S. A. Chernikov (b. 1931) graduated from Dzerzhinsky Military Engineering Academy in 1954. D. Sc. (Eng.), professor of “Instruments and Systems of Orientation, Stabilisation and Navigation” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Academician of the Russian Academy of Navigation and Motion Control. Author of more than 135 publications in the field of gyro technology.

