# НАВИГАЦИОННЫЕ И ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 531.38

# С. А. Черников, Самер-Салек

# ДЕМПФИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрена возможность повышения эффективности динамического гасителя моногармонических колебаний гироскопической системы на основе изменения его структуры путем перенастройки гасителя в зависимости от частоты внешнего воздействия, т.е. управления жесткостью электрической упругой связи инерционной массы гасителя с объектом демпфирования. Рассмотрено влияние погрешности настройки на эффективность гашения колебаний.

Известно, что динамические виброгасители [1, 2] являются одними из наиболее эффективных виброзащитных средств, способных подавлять вынужденные колебания гироскопических систем (ГС) с ярко выраженными резонансными свойствами [3–5]. Однако полоса гашения колебаний оказывается весьма узкой. Кроме того, появляется опасность возникновения резонанса на собственных частотах ГС, связанная с блужданием частоты внешнего воздействия в непосредственной близости от частоты настройки демпфера.

Устранение указанного недостатка и улучшение динамических характеристик инерционно-демпфируемой ГС, представленной в виде системы автоматического регулирования с обратной связью, достигается изменением ее структуры путем отключения обратной связи вне полосы гашения или перенастройки демпфера в зависимости от частоты внешнего воздействия.

Задача решается в линейной постановке, когда влиянием нелинейностей можно пренебречь, а возмущающие воздействия — это моногармонические детерминированные функции времени.

В качестве объекта демпфирования рассмотрим механическую часть абсолютно жесткой ГС с ярко выраженными резонансными свойствами на частоте нутационных колебаний. Пусть на одной из осей карданова подвеса (на оси наружной рамки) установлен динамический гаситель колебаний. Тогда уравнения, описывающие малые движения механической части ГС с динамическим демпфером, можно

записать в следующем виде:

$$A_1 \ddot{\alpha}_1 + \mu_1 \dot{\alpha}_1 - H\beta + F = M_1;$$
  

$$A_2 \ddot{\alpha}_2 + \mu_2 \dot{\alpha}_2 - F = M_2;$$
  

$$B \ddot{\beta} + \mu_\beta \dot{\beta} + H \dot{\alpha}_1 = M_\beta;$$
  
(1)

здесь  $A_1$ , B и  $\alpha_1$ ,  $\beta$  — приведенные моменты инерции и углы поворота ГС относительно наружной и внутренней осей карданова подвеса;  $A_2$ ,  $\alpha_2$  — момент инерции и угол поворота маховика демпфера относительно оси, на которой он установлен; H — кинетический момент гироскопа;  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_\beta$  — коэффициенты вязкого трения; F — момент упругодиссипативного взаимодействия ГС с инерционной массой;  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_\beta$  — моменты внешних сил.

Полагая  $F = C_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \mu(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)$ , где  $C_2$  и  $\mu$  – коэффициенты упругой и диссипативной связи, и исключая из уравнений (1) координату  $\beta$  при  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_\beta = 0$ , получим

$$A_1\ddot{\alpha}_1 + C_1\alpha_1 + C_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \mu(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) = M_1; A_2\ddot{\alpha}_2 - C_2(\alpha_1 - \alpha_2) - \mu(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) = M_2,$$
(2)

где  $C_1 = H^2/B$ .

Механическим аналогом динамических свойств гиросистемы (1) является цепная двухмассовая система с упругодиссипативной связью динамических элементов  $A_1$  и  $A_2$  и упруго закрепленным в инерциальном пространстве динамическим элементом  $A_1$ .

Несмотря на то, что реальная  $\Gamma C$  — это сложная колебательная система, рассматриваемая динамическая модель позволяет с достаточной точностью судить о динамических свойствах системы, поскольку для систем с разнесенными собственными частотами в большинстве случаев можно использовать упрощенные расчетные схемы, учитывая при этом лишь низшие собственные частоты и формы колебаний и выбирая параметры гасителя по данным, получаемым для двухмассовой расчетной схемы.

Решая уравнения (2) относительно вектора обобщенных координат в области изображений, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(p) & \Phi_{12}(p) \\ \Phi_{21}(p) & \Phi_{22}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где передаточные функции податливости определяются следующими

выражениями:

$$\Phi_{11}(p) = \frac{A_2 p^2 + \mu p + C_2}{\Delta(p)};$$

$$\Phi_{22}(p) = \frac{A_1 p^2 + \mu p + C_1 + C_2}{\Delta(p)};$$

$$\Phi_{12}(p) = \Phi_{21}(p) = \frac{\mu p + C_2}{\Delta(p)};$$

$$\Delta(p) = A_1 A_2 p^4 + (A_1 + A_2) \mu p^3 + (A_1 C_2 + A_2 C_2 + A_2 C_1) p^2 + \mu C_1 p + C_1 C_2.$$
(4)

Запишем интересующую нас передаточную функцию податливости  $\Phi_{11}(p)$  при  $\mu = 0$  в виде

$$\Phi_{11}(p) = \frac{p^2 + \nu_2^2}{A_1(p^2 + \omega_{01}^2)(p^2 + \omega_{02}^2)},$$
(5)

где собственные частоты взаимосвязанной системы  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  и парциальные частоты  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  динамических элементов определяются следующими формулами:

$$\omega_{01,02}^{2} = \nu_{1}^{2} \frac{1 + f(1 + \chi) \mp \sqrt{[1 + f(1 + \chi)]^{2} - 4f}}{2}; \quad (6)$$
$$\nu_{1} = \sqrt{\frac{C_{1}}{A_{1}}}; \quad \nu_{2} = \sqrt{\frac{C_{2}}{A_{2}}}; \quad f = \nu_{2}^{2}/\nu_{1}^{2}; \quad \chi = A_{2}/A_{1}.$$

Представим ГС с динамическим гасителем в виде системы с отрицательной обратной связью в соответствии с рис. 1, где

$$W_{11}(p) = \frac{1}{A_1(p^2 + \nu_1^2)} \tag{7}$$

— передаточная функция объекта демпфирования (т.е. ГС без демпфера);  $W_{\rm oc}(p)$  — передаточная функция обратной связи. Тогда передаточную функцию замкнутой системы с гасителем можно записать в виде

$$\Phi_{11}(p) = \frac{W_{11}(p)}{1 + W_{11}(p)W_{\rm oc}(p)} \tag{8}$$



Рис. 1. Структурная схема ГС с демпфером

ISSN 0236-3933. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2006. № 4 113

или

$$\Phi_{11}(p) = \Phi_*(p) \cdot W_{11}(p), \tag{9}$$

где

$$\Phi_*(p) = \frac{1}{1 + W_{=}(p)} \tag{10}$$

- динамический коэффициент подавления колебаний;

$$W_{=}(p) = W_{11}(p)W_{\rm oc}(p) \tag{11}$$

- передаточная функция разомкнутой цепи.

Решая выражение (8) относительно  $W_{oc}(p)$ , получим

$$W_{\rm oc}(p) = \frac{1}{\Phi_{11}(p)} - \frac{1}{W_{11}(p)},\tag{12}$$

из которого следует, что передаточная функция обратной связи равна разности жесткостей системы с гасителем и без него. Подставляя в уравнение (12) значения  $\Phi_{11}(p)$  и  $W_{11}(p)$  из выражений (4) и (7) соответственно, получим:

$$W_{\rm oc}(p) = \frac{C_2 p^2}{p^2 + \nu_2^2}.$$
(13)

Отметим, что система с пассивным динамическим гасителем эквивалентна системе с обратной связью по второй производной с последовательно включенным консервативным осциллятором гасителя. Наличие консервативного звена — сомножителя в передаточной функции разомкнутой цепи — дает возможность для реализации астатизма замкнутой системы по отношению к гармоническому возмущению, если полюс его изображения совпадает с полюсом консервативного звена, которое соответствующим образом настроено.

Эффективность демпфирования можно оценить отношением амплитуд вынужденных колебаний системы с гасителем и системы без гасителя:

$$\frac{|\Phi_{11}(j\omega)|}{|W_{11}(j\omega)|} = |\Phi_*(j\omega)|.$$
(14)

Если ширину полосы гашения  $\Delta \omega$  определить как диапазон частот, в котором  $|\Phi_*(j\omega)|\leqslant 1$ , или, что то же самое,

$$|1 + W_{=}(j\omega)| \ge 1, \tag{15}$$

то амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) разомкнутой цепи  $W_{=}(j\omega)$  в этом диапазоне частот должна находиться вне круга единичного радиуса с центром в точке с координатами -1, j0 (вне "резонансного" круга [6]). При этом точки пересечения  $W_{=}(j\omega)$  с резонансным кругом определяют граничные частоты полосы гашения  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Этим

<sup>114</sup> ISSN 0236-3933. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2006. № 4



Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики ГС:  $1 - C_2 = 0; 2 - C_2 = C_2^*; 3 - C_2 = C_2(\omega)$ 

частотам соответствуют точки пересечения кривых 1 и 2 на рис. 2. В этих точках амплитуды вынужденных колебаний системы с гасителем (с обратной связью) и без него (без обратной связи) одинаковы, такие точки называются "инвариантными" по отношению к обратной связи.

Если амплитуда демпфированной системы должна быть, по крайней мере, в n раз меньше амплитуды объекта демпфирования, то необходимо, чтобы выполнялось условие  $|\Phi_*(j\omega)| < n$ . Полоса гашения при этом будет определяться диапазоном частот, где АФХ  $W_{=}(j\omega)$  находится вне круга радиуса "n" с центром в точке с координатами -1, j0, а граничные частоты полосы гашения — точками пересечения АФХ этого круга.

Инвариантные частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , определяющие полосу гашения, найдем из условия

$$|1 + W_{=}(j\Omega)| = 1.$$
(16)

Подставляя в условие (16) значение  $W_{=}(j\Omega)$  из выражения (11) с учетом формул (7) и (13), получим

$$\left|1 - \frac{\chi \nu_2^2 \Omega^2}{(\nu_1^2 - \Omega^2)(\nu_2^2 - \Omega^2)}\right| = 1.$$

Откуда следует

$$\Omega_{1,2}^2 = \nu_1^2 \frac{1 + f \left(1 + \chi/2\right) \mp \sqrt{\left[1 + f \left(1 + \chi/2\right)\right]^2 - 4f}}{2}.$$
 (17)

Относительную амплитуду в инвариантных точках

$$N_{1,2} = \frac{|\Phi_{11}(j\Omega_{1,2})|}{\Phi_{11}(0)} = \frac{|W_{11}(j\Omega_{1,2})|}{W_{11}(0)}$$
(18)

ISSN 0236-3933. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2006. № 4 115

получим, подставляя в уравнение (7)  $p = j\Omega_{1,2}$ :

$$N_{1,2} = \frac{\pm \left[f\left(1 + \chi/2\right) - 1\right] + \sqrt{\left[f\left(1 + \chi/2\right) - 1\right]^2 + 2f\chi}}{f\chi}$$
(19)

(знаки + и – перед скобкой относятся к частотам  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно).

Если настройка демпфера осуществляется по критерию  $\min \max |\Phi_{11}(j\omega)|$  в полосе гашения  $\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2$ , то оптимальная парциальная частота  $\nu_2^*$  (равная антирезонансной) определяется из условия равенства амплитуд на инвариантных частотах:

$$|\Phi_{11}(j\Omega_1)| = |\Phi_{11}(j\Omega_2)|$$

или

$$N_1 = N_2$$

Откуда следует, что

$$\nu_2^* = \nu_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \chi/2}}.$$
(20)

Оптимальной настройке гасителя (20) соответствуют параметры системы, зависящие исключительно от отношения моментов инерции  $\chi = A_2/A_1$ :

$$f^{*} = \frac{1}{1 + \chi/2}; \quad \Omega_{1,2}^{*2} = \nu_{1}^{2} \left( 1 \mp \sqrt{\frac{\chi}{2 + \chi}} \right);$$

$$N_{1}^{*} = N_{2}^{*} = \sqrt{1 + 2/\chi}; \quad \omega_{01,2}^{*2} = \nu_{1}^{2} \frac{4 + 3\chi \mp \sqrt{\chi(16 + 9\chi)}}{2(2 + \chi)}; \quad (21)$$

$$\Delta \Omega^{*} = \Omega_{2}^{*} - \Omega_{1}^{*} = \nu_{1} \left( \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\chi}{2 + \chi}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\chi}{2 + \chi}}} \right).$$

Относительная АЧХ

$$a(\omega) = |\Phi_{11}(j\omega)| / \Phi_{11}(0), \qquad (22)$$

соответствующая оптимальной настройке демпфера по критерию min max  $|\Phi_{11}(j\omega)|$  в полосе гашения  $\Omega_1^* \leq \omega \leq \Omega_2^*$  для  $\chi = 0,2$ , показана на рис. 2 (кривая 2). Здесь же показана относительная АЧХ объекта демпфирования  $b(\omega) = |W_{11}(j\omega)|/W_{11}(0)$  (кривая 1). Как видно из рисунка, вне полосы гашения амплитуда демпфированной (замкнутой) системы  $a(\omega)$  оказывается больше недемпфированной системы  $b(\omega)$ , особенно в области резонансных частот  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ . Следовательно, "отключение" демпфера в указанном диапазоне частот создает принципиальную возможность для решения задачи устранения основного недостатка динамического гасителя, связанного с опасностью возникновения резонансов на собственных частотах. Физически осуществить отключение обратной связи означает оборвать (отсоединить) упругую связь, т.е. сделать так, чтобы  $C_2 = 0$ . Иными словами, для решения поставленной задачи необходимо управлять жесткостью так, чтобы

$$C_{2} = \begin{cases} 0, \text{ при } \omega < \Omega_{1}^{*}; \\ C_{2}^{*}, \text{ при } \Omega_{1}^{*} \leq \omega \leq \Omega_{2}^{*}; \\ 0, \text{ при } \omega > \Omega_{2}^{*}. \end{cases}$$
(23)

Такое управление можно осуществить, например, с помощью электромагнитной муфты, отключающей упругую связь маховика гасителя с объектом демпфирования, или с помощью электрической пружины. Логический закон управления (23) может быть обеспечен с помощью микропроцессора.

Относительная АЧХ  $a(\omega)$  ГС с демпфером, отключаемым вне полосы гашения в соответствии с законом (23), приведена на рис. 2 (кривая 3). Как видно,  $a(\omega) \leq N$  не только в полосе гашения, но и вне ее.

Кинематическая схема ГС с гасителем переменной структуры, установленным на оси платформы, приведена на рис. 3, на котором



Рис. 3. Кинематическая схема ГС с гасителем переменной структуры

обозначено 1 — объект демпфирования ГС; 2 — инерционная масса, связанная с объектом электрической пружиной, включающей датчик угла 3, усилитель 4, датчик момента 5 и управляющее устройство 6, обеспечивающее логический закон управления жесткостью.

Динамический гаситель отключить можно не только путем "обрыва" упругой связи ( $C_2 \rightarrow 0$ ), но и "заклинивания" ( $C_2 \rightarrow \infty$ ) массы гасителя относительно демпфируемой массы. При этом масса гасителя жестко соединяется с объектом демпфирования, передаточная функция которого будет иметь вид

$$W_{11}^{\infty}(p) = \frac{1}{(A_1 + A_2)p^2 + C_1} = \frac{1}{A_1(1 + \chi)\left(p^2 + \frac{\nu_1^2}{1 + \chi}\right)}$$

Передаточные функции податливости замкнутой системы определяются теми же выражениями (4), что и в случае обрыва упругой связи. Инвариантные частоты при заклинивании массы гасителя определяются формулой

$$\Omega_{1,2}^{\infty 2} = \nu_1^2 \frac{1 + f(1+\chi) \mp \sqrt{\left[1 + f(1+\chi)\right]^2 - 4f(1+\chi/2)}}{2+\chi}$$

Оптимальная настройка гасителя определяется равенством амплитуд в инвариантных точках:

$$u_2^{\infty} = 
u_1 \frac{1}{1+\chi}, \quad$$
или  $f^{\infty} = \frac{1}{(1+\chi)^2}.$ 

Оптимальной настройке соответствуют следующие значения параметров ГС:

$$\Omega_{1,2}^{\infty 2} = \nu_1^2 \frac{1 \mp \sqrt{\frac{\chi}{2+\chi}}}{1+\chi}; \quad N_1^{\infty} = N_2^{\infty} = \sqrt{1+\frac{2}{\chi}};$$
$$\omega_{01,2}^{\infty 2} = \nu_1^2 \frac{2+\chi \mp \sqrt{\chi(4+\chi)}}{2(1+\chi)};$$
$$\Omega^{\infty} = \nu_1 \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{\chi}{2+\chi}}}{1+\chi}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{\chi}{2+\chi}}}{1+\chi}}\right) = \Delta\Omega^* \frac{1}{\sqrt{1+\chi}},$$

Δ

где  $\Delta\Omega^*$  — полоса гашения в случае обрыва упругой связи ( $C_2 = 0$ ). Амплитуда в инвариантных точках оказывается одинаковой  $N_{1,2}^{\infty} = N_{1,2}^* = \sqrt{1+2/\chi}$ . Поскольку эффективность обоих способов "отключения" обратной связи практически одинакова (уменьшение полосы гашения в  $\sqrt{1+\chi}$  раз при  $\chi \leq 0.2$  составляет менее 10%), то вопрос о применении того или иного способа должен решаться с учетом преимуществ их технической реализации.

Если полосу гашения определить как диапазон частот, в котором относительная амплитуда вынужденных колебаний, обусловленных моногармоническими возмущениями, не превышает наперед заданную величину  $a_*$ , причем  $a_* < N^*$ , то задача демпфирования может быть решена на основе многократного (два и более раз) изменения жесткости. При этом нижняя (назначаемая) граница полосы гашения  $\Omega_1^a$  соответствует настройке демпфера на частоту  $\nu_{21}$  на основе условия:

$$|\Phi_{11}(j\Omega_1^a)|/\Phi_{11}(0) = a_*.$$
(24)

Решая это условие относительно  $\nu_2$ , получим

$$\nu_{21}^{2} = (\Omega_{1}^{a})^{2} \frac{1 + (1 - (\Omega_{1}^{a})^{2}/\nu_{1}^{2}) a_{*}}{1 + (1 - (1 + \chi)(\Omega_{1}^{a})^{2}/\nu_{1}^{2}) a_{*}}.$$

Верхняя граница полосы гашения  $\Omega_{-}$  определяется частотой отключения обратной связи, т.е. условием

$$|W_{11}(j\Omega_{-})|/W_{11}(0) = a_{*}$$

из которого следует, что

$$\Omega^2 = \nu_1^2 (1 + 1/a_*). \tag{25}$$

Парциальная частота демпфера внутри полосы гашения перенастраивается дискретно на частотах  $\Omega_i^a$  (i = 1, 2, 3...). При этом частота перенастройки  $\Omega_{i+1}^a$  определяется условием

$$|\Phi_{11}(j\Omega^a_{i+1})|/\Phi_{11}(0) = a_*, \quad \text{при} \quad \nu_2 = \nu_{2i},$$

из которого следует

$$\Omega_{i+1}^{a2} = \nu_1^2 \frac{1 + f_i(1+\chi) - \frac{1}{a_*} + \sqrt{\left(1 + f_i\left(1+\chi\right) - \frac{1}{a_*}\right)^2 - 4f_i\left(1-\frac{1}{a_*}\right)}}{2};$$
(26)

здесь

$$f_i = \nu_{2i}^2 / \nu_1^2; \quad \nu_{2i}^2 = (\Omega_i^a)^2 \frac{1 + (1 - (\Omega_i^a)^2 / \nu_1^2) a_*}{1 + (1 - (1 + \chi)(\Omega_i^a)^2 / \nu_1^2) a_*}.$$
 (27)

Амплитудно-частотная характеристика ГС с гасителем переменной структуры при  $\chi = 0,2$  и заданной допустимой амплитудой колебаний в полосе гашения  $a_* \leq 1$  приведены на рис. 4, *a* (кривая 3),



Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики ГС (*a*) и закон перенастройки гасителя (б), обеспечивающий  $a(\omega) \le 1$ :  $1 - C_2 = 0; 2 - C_2 = C_2^*; 3 - C_2 = C_2(\omega)$ 

а на рис. 4, б приведен закон перенастройки гасителя в зависимости от частоты внешнего воздействия. Как видно из рисунка, для обеспечения заданной эффективности подавления колебаний потребовалось четыре перенастройки гасителя. При заданной нижней границе полосы гашения  $\Omega_1^a = 0,7$  частота включения обратной связи  $\Omega_+ = 0,687$ , а частота отключения  $\Omega_- = 1,38$ . Во всем частотном диапазоне АЧХ податливости практически не превышает статического отклонения, а в полосе гашения  $\Omega_1^a < \omega < \Omega_5^a, a(\omega) \leq 1$ .

Чем меньше допустимая амплитуда вынужденных колебаний  $a_*$ , тем у́же частотный диапазон  $\Delta \Omega_i^a = \Omega_{i+1}^a - \Omega_i^a$  с постоянной настройкой ( $C_i = \text{const}$ ). При стремлении  $a_*$  к нулю  $\Delta \Omega_i^a$  также стремится к нулю, а  $\nu_{2i} \rightarrow \Omega_i^a$  (см. формулу (27)), или, что то же самое,  $\nu_2 \rightarrow \omega$ . Следовательно,

$$C_2^* = A_2 \omega^2. \tag{28}$$

<sup>120</sup> ISSN 0236-3933. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2006. № 4

Таким образом, если демпфер настраивать так, что его парциальная частота  $\nu_2$ , совпадающая с антирезонансной частотой демпфированной системы, будет следить за частотой внешнего воздействия в соответствии с формулой (28), то амплитуда вынужденных колебаний в полосе их гашения будет стремиться к нулю. Однако эффективность гашения колебаний при этом существенно зависит от точности измерения частоты внешнего воздействия.

Рассмотрим влияние погрешности настройки демпфера, обусловленной погрешностью измерения частоты, на эффективность гашения колебаний. Пусть

$$\omega_{\Delta} = \omega \pm \Delta \omega,$$

где  $\omega_{\Delta}$  и  $\omega$  — измеренное и истинное значения частоты;  $\Delta \omega$  — погрешность измерения частоты.

Поскольку настройка демпфера осуществляется по измеренному значению частоты, то

$$\nu_{2\Delta} = \nu_2 \pm \Delta \nu_2, \tag{29}$$

где  $\nu_{2\Delta}$  — парциальная частота настройки демпфера;  $\nu_2$  — идеальная парциальная частота настройки демпфера;  $\Delta \nu_2$  — погрешность настройки демпфера.

Тогда, с учетом формулы (29), из уравнения (22) получим

$$a_{\Delta}(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\nu_1^2} \left(1 + \frac{\chi}{1 - \lambda}\right)\right)^{-1}, \qquad (30)$$

где  $\lambda$  — коэффициент, учитывающий погрешность настройки демпфера:

$$\lambda = \frac{1}{(1 \pm \Delta \omega / \omega)^2}$$

Семейство АЧХ, описываемых выражением (30), при  $\chi = 0,1$  для различных значений  $\Delta \omega / \omega$  приведено на рис. 5. Нижний порог полосы гашения, определяемый допустимой амплитудой вынужденных колебаний  $a_{\Delta}^{0}$  при заданной погрешности измерения частоты  $\Delta \omega / \omega$ , легко получить, решая уравнение (30) относительно  $\omega$ :

$$\frac{\Omega_{\Delta}^{0}}{\nu_{1}} = \sqrt{\frac{1+a_{\Delta}^{0}}{a_{\Delta}^{0}\left(1+\frac{\chi}{1-\lambda}\right)}}.$$

Так, (см. рис. 5), при  $\Delta \omega / \omega = 0,001$ ,  $\chi = 0,1$  и  $a_{\Delta}^0 = 0,1$  нижняя граница полосы гашения  $\Omega_{\Delta}^0 = 0,46\nu_1$ , в то время, как при  $\Delta \omega / \omega = 0,01$  и  $\chi = 0,1$  амплитуда  $a_{\Delta}^0$  достигает величины, в 10 раз большей  $(a_{\Delta}^0 = 1)$  уже при  $\Omega_{\Delta}^0 = 0,58$ , что подтверждает необходимость точного  $(\Delta \omega / \omega \leq 0,005)$  измерения частоты.

ISSN 0236-3933. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2006. № 4 121



Рис. 5. Зависимость АЧХ ГС от погрешности настройки гасителя на частоту внешнего воздействия:  $1 - \Delta \omega / \nu_1 = 0.01; 2 - \Delta \omega / \nu_1 = 0.005; 3 - \Delta \omega / \nu_1 = 0.001; 4 - \Delta \omega / \nu_1 = -0.001$ 

В заключение приведем некоторые результаты компьютерного моделирования в пакете MATLAB-SIMULINK динамики гироскопической системы, описываемой уравнениями (1) с динамическим гасителем колебаний, работающим в режиме настройки на частоту внешнего воздействия в соответствии с уравнением (28). При моделировании приняты следующие параметры ГС:

$$\begin{split} A_1 &= 100 \, \mathrm{B} = 10^3 \, \mathrm{f\cdot cm \cdot c^2}; \ H &= 10^4 \, \mathrm{f\cdot cm \cdot c}; \\ \chi &= 0,2; \ M_1 = a_{\mathrm{m}} \sin(\omega t); \ \mu_1 = 500 \, \mathrm{f\cdot cm \cdot c}; \\ M_2 &= M_\beta = 0; \ a_{\mathrm{m}} = 10^3 \, \mathrm{f\cdot cm}; \ \omega = \nu_1. \end{split}$$

На рис. 6, б представлены вынужденные установившиеся колебания относительно наружной оси карданова подвеса  $\alpha(t) = a(\nu_1)sin(\nu t + \varphi)$  ГС без гасителя, а на рис. 6, s — то же с гасителем, настроенным на частоту внешнего воздействия  $M_1(t)$  (рис. 6, a). Как видно, относительная амплитуда вынужденных колебаний ГС с гасителем в установившемся режиме на резонансной  $\nu_1$  частоте объекта демпфирования  $a(\nu_1) = \Phi_{11}(j\nu)/\Phi_{11}(0) = 0,05$ , что соответствует действительной амплитуде  $a(\nu_1) = \Phi_{11}(j\nu_1)a_{\rm M}$  при  $a_{\rm M} = 10^3$  г·см в одну угловую секунду ( $a_1(\nu_1) = 1''$ ). В то время, как при отсутствии гасителя относительная амплитуда достигает величин  $a(\nu_1) = 200$ , что соответствует действительной амплитуде  $a(\nu_1) = 1,14^\circ$ . Семейство огибающих вынужденных колебаний ГС с частотой  $\nu_1$  в переходном процессе для разных значений  $\chi$  представлено на рис. 7.

Как видно, реакция ГС на входное воздействие сопровождается перерегулированием, которое тем больше, чем меньше  $\chi$ . Процесс установления вынужденных колебаний при малом затухании (в нашем



Рис. 6. Внешний гармонический момент (a) и вынужденные установившиеся колебания относительно наружной оси карданова подвеса ГС без гасителя (б) и ГС с гасителем (в)

случае относительный коэффициент затухания  $\xi = \frac{\mu_a}{2H} \sqrt{\frac{B}{A}} = 0,0025$ ) составляет для  $\chi = 0,2$  примерно 20 с.

В случае необходимости уменьшения времени переходного процесса, задачу можно решить, вводя диссипативную связь между инерционной массой гасителя и ГС. Однако при этом динамический ко-



Рис. 7. Огибающие переходного процесса вынужденных колебаний ГС с частотой  $\omega = \nu_1$ :  $l - \chi = 0,02; \ 2 - \chi = 0,05; \ 3 - \chi = 0,1; \ 4 - \chi = 0,2$ 

ISSN 0236-3933. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2006. № 4 123



Рис. 8. Амплитудно-частотные характеристики ГС с гасителем, настраиваемым на частоту внешнего воздействия:  $1 - \Delta \omega / \nu_1 = 0; 2 - \Delta \omega / \nu_1 = 0.01; 3 - \Delta \omega / \nu_1 = 0.01$ 

эффициент подавления колебаний  $|\Phi_*(j\omega)|$  в области антирезонанса увеличится.

АЧХ ГС с гасителем, настраиваемым на частоту внешнего воздействия в соответствии с выражением (28), при  $\chi = 0.2$ ;  $\Omega_+ = 0.5$ ;  $\Omega_- = 1.6$  приведены на рис. 8. При этом кривая *1* соответствует идеальной настройке ( $\Delta \omega = 0$ ), а кривые *2* и *3* — настройке гасителя с погрешностью  $\Delta \omega / \omega = \pm 0.01$ .

Таким образом, динамический гаситель колебаний с переменной структурой позволяет существенно повысить эффективность подавления вынужденных колебаний и расширить полосу их гашения. Многократная перенастройка гасителя в зависимости от частоты внешнего воздействия обеспечивает заданную допустимую относительную амплитуду вынужденных колебаний. Настройка демпфера на частоту внешнего воздействия позволяет обеспечить наибольшую эффективность подавления колебаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Коренев Б. Г., Резников Л. М. Динамические гасители колебаний. М.: Наука, 1998. 304 с.
- Елисеев С. В., Волков Л. Н., Кухаренко В. П. Динамика механических систем с дополнительными связями. – Новосибирск: Наука, 1999. – 214 с.
- 3. Н о в о ж и л о в И. В. Силовой гироскопический стабилизатор с динамическим поглотителем колебаний // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 4. С. 112–114.

- 4. Черников С. А. Инерционное демпфирование систем гироскопической стабилизации // Изв. вузов, Приборостроение. 1969. Т. 12, № 8. С. 66–70.
- 5. Черников С. А. Динамическая стабилизация недемпфированных упругих гиросистем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 3. С. 11–19.
- 6. Черников С. А. Динамика систем гироскопической стабилизации. М.: МО СССР, 1967. 328 с.

Статья поступила в редакцию 16.02.2006

Сергей Акимович Черников родился в 1931 г., окончил в 1954 г. ВИА им. Ф.Э. Дзержинского. Д-р техн. наук, профессор кафедры "Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Академик Российской академии навигации и управления движением. Автор более 150 научных работ в области гироскопической техники.

S.A. Chernikov (b. 1931) graduated from the Military Engineering Academy n.a. Dzerzhinsky in 1954. D. SC. (Eng.), professor of "Instruments and Systems for Orientation, Stabilization and Navigation" department of the Bauman Moscow State Technical University. Academician of the Russian Academy of Navigation and Motion Control. Author of over 150 publications in the field of gyrotechnology.



Самер-Салек родился в 1964 г., окончил Дамасский университет в 1987 г., магистратуру МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1997 г. и аспирантуру МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2005 г. Автор 6 научных работ в области систем ориентации, стабилизации и навигации.

Samer-Salek (b. 1964) graduated from the Damask University in 1987 and the Bauman Moscow State Technical University in 1997. Author of 6 publications in the field of systems of orientation, stabilization and navigation.

#### ЖУРНАЛ "ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА имени Н.Э. БАУМАНА"

Журнал издается в трех сериях: "Приборостроение", "Машиностроение", "Естественные науки"; периодичность — 12 номеров в год.

Индекс	Наименование серии	Объем выпуска	Подписная цена (руб.)	
		Полугодие	3 мес.	6 мес.
72781	"Машиностроение"	2	250	500
72783	"Приборостроение"	2	250	500
79982	"Естественные науки"	2	250	500

## Подписка по каталогу "Газеты, журналы" агентства "Роспечать"

## Подписывайтесь и публикуйтесь!

Адрес редакции журнала "Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана": 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5. Тел.: (495) 263-62-60; 263-60-45.

E-mail: press@bmstu.ru

ISSN 0236-3933. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2006. № 4 125