

НАВИГАЦИОННЫЕ И ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

УДК 519.63:532.5

ОДНОМЕРНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООВОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА

М.А. Басараб, В.А. Матвеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: bmic@mail.ru

Рассмотрена упрощенная модель теплового (конвективного) акселерометра на основе решений двух одномерных уравнений конвективного теплопереноса в смежных областях. Данные уравнения вместе с соответствующими краевыми условиями первого рода имеют простые аналитические решения, позволяющие на качественном уровне оценить некоторые рабочие характеристики прибора. Рассчитано оптимальное с точки зрения максимального отклика расположение датчиков температуры. Найдена зависимость величины этого отклика от характерного линейного размера прибора. Модельное решение, несмотря на свою простоту, находится в хорошем соответствии с аналитическими и численными решениями двумерных и трехмерных задач конвекции-диффузии в замкнутых полостях. Выявлены ограничения, присущие одномерной постановке задачи.

Ключевые слова: естественная конвекция, тепловой акселерометр.

ONE-DIMENSIONAL ANALYTICAL MODEL OF THE THERMAL ACCELEROMETER

M.A. Basarab, V.A. Matveev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: bmic@mail.ru

A simplified model of the thermal (convective) accelerometer is proposed on the basis of solving two one-dimensional equations of convective heat transfer in adjacent domains. The equations, together with corresponding first-kind boundary conditions, have simple analytical solutions and allow qualitative estimation of some parameters of the device. The distance between temperature sensors that is optimal from the viewpoint of maximum response is evaluated. A dependence of the response on the characteristic linear size of the device is found. The model solution, despite its simplicity, is in a good agreement with analytical and numerical solutions of two- and three-dimensional convection-diffusion problems in closed cavities. The shortcomings inherent in one-dimensional statement of the problem are revealed.

Keywords: natural convection, thermal accelerometer.

Работа теплового (конвективного) акселерометра [1, 2] основана на явлении конвекции жидкости или газа в полости под действием внешних сил инерции. Такие акселерометры имеют существенные преимущества перед традиционными датчиками ускорения, в частности, на основе микроэлектромеханических систем. Конвективные акселерометры имеют высокую надежность, низкую стоимость, способны выдерживать и измерять большие перегрузки.

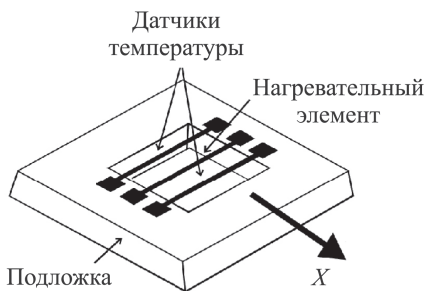


Рис. 1. Схема теплового акселерометра (X — ось чувствительности)

ускорения между датчиками возникает разность температур dT , зависящая от амплитуды ускорения, и температурный профиль искажается (рис. 2, б). Ненулевая разность температур между тепловыми датчиками преобразует входное сопротивление в выходной электрический сигнал.

Расчет оптимальных параметров прибора требует решения громоздкой краевой задачи, описываемой системой дифференциальных уравнений Навье–Стокса. Аналитически такая задача решена лишь для ограниченного класса простых областей (цилиндр, сфера) [3, 4] в приближении Буссинеска. Поэтому в общем случае требуется численное моделирование на основе конечно-разностных или конечно-элементных методов [5–7], а в [8] для решения двумерной задачи конвекции-диффузии в замкнутой полости было предложено использовать численно-аналитический метод R-функций.

Вместе с тем зачастую простейшие одномерные модели физических процессов позволяют вполне адекватно исследовать функционирование и получать качественные оценки характеристик приборов. В работе данный подход впервые рассматривается применительно к решению задачи конвективного теплопереноса в полости теплового акселерометра и оценке параметров работы прибора.

Математическая модель. Пусть полость прибора имеет поперечное сечение в плоскости, перпендикулярной осям нагревательного элемента и

Нагревательный элемент теплового акселерометра (рис. 1) создает вокруг себя симметричное тепловое поле. С противоположных сторон этого элемента симметрично расположены тепловые датчики.

При отсутствии внешнего ускорения тепловые датчики Д1 и Д2 выдают одинаковый сигнал, и профиль температуры вдоль оси чувствительности симметричен относительно нагревателя (рис. 2, а). Под действием внешнего

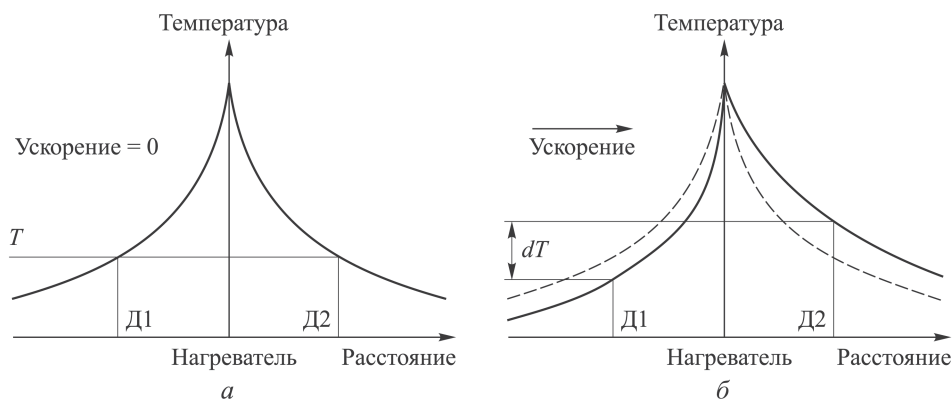


Рис. 2. Профиль температуры вдоль оси чувствительности при отсутствии (а) и наличии (б) внешнего ускорения

датчиков, размерами $2L \times H$ по горизонтали и вертикали соответственно. Считаем, что на корпусе прибора поддерживается постоянная температура T_C , а внутренний источник (нагревательный элемент) в стационарном режиме нагреет до постоянной заданной температуры T_H .

Стационарное уравнение конвекции-диффузии имеет вид [7]:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = f, \quad (1)$$

где u , v — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости вдоль координат x , y ; $T(x, y)$ — искомая температура; D — коэффициент диффузии; $f(x, y)$ — функция внутреннего источника теплоты.

Если вертикальный размер полости мал по сравнению с горизонтальным, то, полагая пренебрежимо малыми производные температуры по переменной y , получаем одномерную модель:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x). \quad (2)$$

Рассматривая $p = u/D$ как параметр отношения конвективной и диффузионной составляющих теплопереноса, получаем

$$p \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f. \quad (3)$$

Уравнение (3) дополним симметричными граничными условиями Дирихле:

$$T(-L) = T(L) = T_C. \quad (4)$$

Поскольку решение уравнения (3) в зависимости от функции f может иметь достаточно громоздкий вид, используем следующий подход. Пусть внутренний источник в центре области (интервала) имеет относительно малый линейный размер по сравнению с длиной L (точечный источник). На подынтервалах $x \in (-L, 0)$ и $x \in (0, L)$ рассмотрим независимо две крайние задачи, описываемые уравнениями

$$p \frac{\partial T_j}{\partial x} - \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} = 0, \quad j = 1, 2 \quad (5)$$

с крайними условиями

$$\begin{aligned} T_1(0) &= T_H, & T_1(-L) &= T_C; \\ T_2(0) &= T_H, & T_2(L) &= T_C. \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение (5) имеет вид

$$T_i(x) = C_{i1} + C_{i2} \exp(px), \quad (7)$$

а решения крайних задач можно записать как

$$\begin{aligned} T_1(x) &= (T_C - T_H) \frac{\exp(px) - 1}{\exp(-pL) - 1} + T_H; \\ T_2(x) &= (T_C - T_H) \frac{\exp(px) - 1}{\exp(pL) - 1} + T_H. \end{aligned} \quad (8)$$

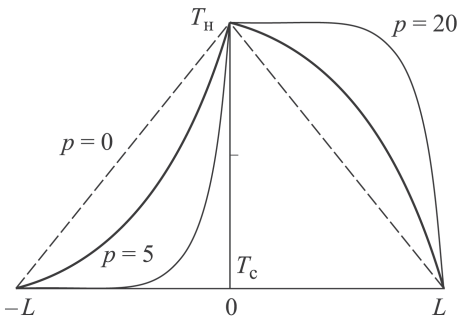


Рис. 3. Точное решение уравнений (5) с краевыми условиями (6) при различных p

При очень больших значениях линейной скорости u (т.е. при $p \gg 1$) температура остается близкой к T_C вплоть до достижения ближайшей окрестности источника ($x = 0$), где возникает пограничный слой и наблюдается ее резкий рост до T_H .

Расчет характеристик прибора. Одним из главных вопросов при проектировании теплового акселерометра является нахождение оптимального расстояния между датчиками и нагревательным элементом. Для повышения чувствительности прибора необходимо добиться максимального изменения температуры на датчиках в расчете на единицу ускорения. Запишем выражения для разности температур между каждым из датчиков и нагревательным элементом (рис. 4):

$$\begin{aligned} \Delta T_1(x) &= T_1(x) - T_1^{(0)}(x) = (T_C - T_H) \left(\frac{\exp(px) - 1}{\exp(-pL) - 1} + \frac{x}{L} \right); \\ \Delta T_2(x) &= T_2(x) - T_2^{(0)}(x) = (T_C - T_H) \left(\frac{\exp(px) - 1}{\exp(pL) - 1} - \frac{x}{L} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для нахождения положения датчиков с максимальным откликом вычислим производные выражений (10) по x , приравняем их к нулю и получим

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{1}{p} \ln \frac{1 - \exp(-pL)}{pL}; \\ x_2^* &= L + x_1^* = \frac{1}{p} \ln \frac{\exp(pL) - 1}{pL}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом оптимальное расположение датчиков несимметрично относительно центра и являлось бы функцией параметра p , а значит, внешнего ускорения, определяющего скорость u . Учитывая это, будем искать оптимальное симметричное положение датчиков, т.е. максимизировать величину

$$\Delta T(x) = T_2(x) - T_1(-x). \quad (12)$$

Подставим выражения (8) в (12) и найдем производную

$$\frac{d\Delta T}{dx} = \frac{\operatorname{ch} p(x - L) - \operatorname{ch} px}{1 - \operatorname{ch} pL}. \quad (13)$$

В отсутствие конвекции ($p = 0$) вместо (8) будем иметь распределение температуры по линейному закону:

$$\begin{aligned} T_1^{(0)}(x) &= -(T_C - T_H) \frac{x}{L} + T_H; \\ T_2^{(0)}(x) &= (T_C - T_H) \frac{x}{L} + T_H. \end{aligned} \quad (9)$$

Графики температуры в зависимости от параметра p показаны на рис. 3.

При значениях $p < 1$ преобладает влияние диффузионной составляющей, в то время как при $p > 1$ более существенный вклад оказывает конвекция.

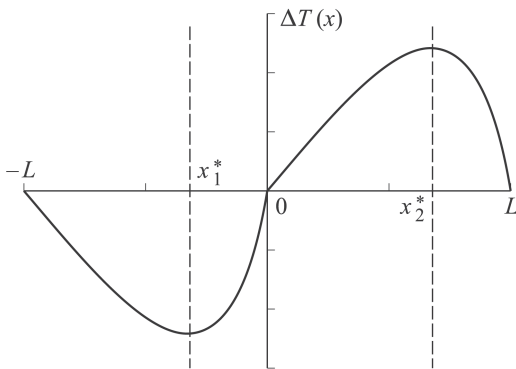


Рис. 4. Приращение температуры по оси чувствительности прибора

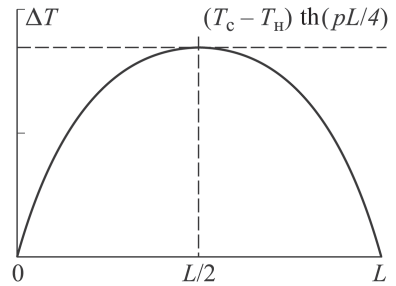


Рис. 5. Разность температур в противоположных точках как функция расстояния до нагревателя

Приравняв (13) к нулю, находим, что максимум разности (12) достигается в точке

$$\tilde{x} = L/2 \quad (14)$$

и равен

$$\Delta T(\tilde{x}) = (T_C - T_H) \operatorname{th} \frac{pL}{4}. \quad (15)$$

График зависимости $\Delta T(x)$ приведен на рис. 5.

По формуле (15) можно заключить, что максимум ΔT растет по закону гиперболического тангенса при увеличении L либо p , асимптотически стремясь к $(T_C - T_H)$ при $L, p \rightarrow \infty$.

Оценка чувствительности прибора, т.е. отношения

$$S = \frac{\Delta T}{a},$$

где a — внешнее ускорение, требует нахождения зависимости скорости

$$u = u(a),$$

которая может быть определена экспериментально с использованием двумерной модели конвективного теплопереноса.

Заключение. Впервые рассмотрена одномерная модель теплового акселерометра, позволяющая в первом приближении оценить параметры прибора, влияющие на его чувствительность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dauderstödt U.A., de Vries P.H.S., Hiratsuka R., Korvink J.G., Sarro P.M., Baltes H., Middelhoeck S. Simulation aspects of a thermal accelerometer // Sensors and Actuators A, 1996. Vol. 55. P. 3–6.
2. Mailly F., Giani A., Martinez A., Bonnot R., Temple-Boyer P., Boyer A. Micromachined thermal accelerometer // Sensors and Actuators A, 2003. Vol. 103. P. 359–363.
3. Hodnett P.F. Natural convection between horizontal heated concentric circular cylinders // Z. Angew. Math. Phys., 1973. Vol. 24. P. 507–516.
4. Mack L.M., Hardee H.C. Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers // Int. J. Heat Mass Tran., 1968. Vol. 11. P. 387–396.

5. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. М.: Изд-во МЭИ, 2003. 312 с.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: УРСС, 2009.
7. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
8. Giani A., Combette P., Deblonde A., Garraud A., Matveev V.A., Basarab M.A. A Highly Sensitive Thermal Accelerometer with Improved Bandwidth // Proc. of the 20th Saint-Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, 27–29 May, 2013, Saint-Petersburg, Russia. P. 191–198.

REFERENCES

- [1] Dauderstädt U.A., de Vries P.H.S., Hiratsuka R., Korvink J.G., Sarro P.M., Baltés H., Middelhoek S. Simulation aspects of a thermal accelerometer. *Sensors and Actuators A*, 1996, vol. 55, pp. 3–6.
- [2] Maily F., Giani A., Martinez A., Bonnot R., Temple-Boyer P., Boyer A. Micromachined thermal accelerometer. *Sensors and Actuators A*, 2003, vol. 103, pp. 359–363.
- [3] Hodnett P.F. Natural convection between horizontal heated concentric circular cylinders. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1973, vol. 24, pp. 507–516.
- [4] Mack L.M., Hardee H.C. Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1968, vol. 11, pp. 387–396.
- [5] Patankar S.V. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах [Numerical solution of heat conduction and convection heat transfer during flow channels]. Moscow, MEI Publ., 2003. 312 p.
- [6] Samarский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии Numerical methods for solving convection-diffusion problems. Moscow, URSS Publ., 2009. 248 p.
- [7] Fletcher C.A.J. Computational Galerkin method. N.Y., Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 1984. 309 p. (Russ. Ed.: Fletcher K. Численные методы на основе метода Галеркина. Moscow, Mir Publ., 1988. 352 p.).
- [8] Giani A., Combette P., Deblonde A., Garraud A., Matveev V.A., Basarab M.A. A Highly Sensitive Thermal Accelerometer with Improved Bandwidth. *Proc. 20th Saint Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems*, Saint-Petersburg, Russia, 27–29 May, 2013, pp. 191–198.

Статья поступила в редакцию 26.11.2013

Михаил Алексеевич Басараб — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Информационная безопасность” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 5 монографий и более 100 научных работ в области прикладной математики, информатики, цифровой обработки сигналов, радиофизики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5.

M.A. Basarab — Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor of “Information Security” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of five monographs and more than 100 publications in the field of applied mathematics, informatics, digital signal processing, and radiophysics.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Валерий Александрович Матвеев — д-р техн. наук, профессор, руководитель Научно-учебного комплекса “Информатика и системы управления”, заведующий кафедрой “Информационная безопасность” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Заслуженный деятель науки РФ, лауреат Государственных премий СССР и РФ, лауреат премий Правительства РФ в области науки и образования. Автор более 200 научных работ и 25 патентов в области приборостроения и высокотемпературной сверхпроводимости. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5.

V.A. Matveev — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Information security” department, chief of Scientific and Educational Complex for Informatics and Control Systems of the Bauman Moscow State Technical University. Honored Scientist of the Russian Federation, Laureate of the State Prizes of the USSR and Russian Federation, Laureate of the RF Government Prize in Science and Education. Author of more than 200 publications and 25 patents in the field of instrument engineering and high-temperature superconductivity. Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.