НАВИГАЦИОННО-ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 531.383

И. Г. Солдатенко

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ НАСТРАИВАЕМОГО ГИРОСКОПА

С использованием теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле в явной форме найдены приближенные выражения для периодических решений нелинейной системы уравнений, описывающих движение динамически настраиваемого гироскопа. Рассмотрены два случая, относящиеся к двум порождающим частотам линейных колебаний. Найдены поправки к частотам линейных колебаний.

Объектом исследования является динамически настраиваемый гироскоп. С использованием теоремы Ляпунова [1, 2] в явной форме найдены приближенные выражения для периодических решений нелинейной системы уравнений, описывающих движение динамически настраиваемого гироскопа. Отметим, что анализ погрешностей проведен в работах [2, 3]. В работе [4] в одном частном случае уравнения движения динамически настраиваемого гироскопа проинтегрированы в квадратурах.

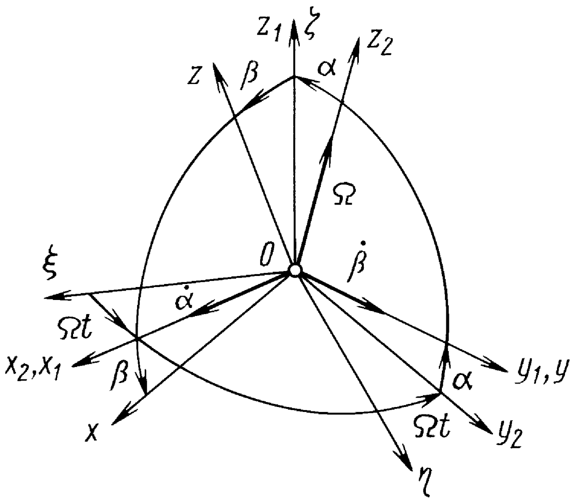
Ось вращения вала гироскопа совпадает с осью $O\zeta$ инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Системы координат $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$ связаны с ротором, кольцом и вращающимся валом соответственно. Угол α характеризует поворот кольца относительно вала вокруг оси Ox_1, а угол β — поворот ротора относительно кольца вокруг оси Oy. Вал вращается относительно оси $O\zeta$ с постоянной угловой скоростью Ω (см. рисунок).

Функция Лагранжа для рассматриваемой системы имеет следующий вид:

$$L = T - \Pi,$$

где

$$T = \frac{1}{2}\left(A_1 + \frac{A+D}{2} + \frac{A-D}{2}\cos 2\beta\right)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}B\dot{\beta}^2 + \\ + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{A+D}{2} - B + D_1 - B_1\right)\cos 2\alpha + (D-A)\cos^2\alpha\cos 2\beta\right)\Omega^2 + \\ + B\Omega\dot{\beta}\sin\alpha + \frac{D-A}{2}\Omega\dot{\alpha}\cos\alpha\sin 2\beta,$$



Системы координат

$$\Pi = \frac{1}{2}k(\sin^2\alpha + \sin^2\beta),$$

A, B, D — моменты инерции ротора относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно; A_1, B_1, D_1 — моменты инерции кольца относительно осей Ox_1, Oy_1, Oz_1 соответственно; k — жесткость торсионов.

Уравнения движения запишем в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\alpha} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\beta} - \frac{\partial L}{\partial\beta} = 0. \tag{1}$$

Примем $A_1 = B_1$, $A = B$ [4] и введем безразмерное время $\tau_1 = \Omega t$. Уравнения движения системы (1) с точностью до членов третьего порядка включительно имеют вид

$$(A + A_1)\alpha'' - (2A - D)\beta' + \left(\frac{k}{\Omega^2} + (D - A + D_1 - A_1)\right)\alpha =$$
$$= \frac{2}{3}\alpha^3\left(D - A + D_1 - A_1 + \frac{k}{\Omega^2}\right) - \frac{2A - D}{2}\beta'\alpha^2 +$$
$$+ (D - A)\left(\frac{D - 2A}{A + A_1}\beta'\beta^2 + \frac{D + D_1 + \dfrac{k}{\Omega^2}}{A + A_1}\alpha\beta^2 - 2\alpha'\beta'\beta\right), \tag{2}$$
$$A\beta'' + (2A - D)\alpha' + \left(D - A + \frac{k}{\Omega^2}\right)\beta = \frac{1}{2}(2A - D)\alpha'\alpha^2 +$$
$$+ (D - A)(\alpha'^2\beta - 2\alpha'\beta^2 + \alpha^2\beta) + \frac{2}{3}\beta^3\left(D - A + \frac{k}{\Omega^2}\right).$$

В режиме динамической настройки одна из собственных частот системы совпадает с угловой скоростью вращения вала, безразмерные частоты равны $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = (D - A)/A$. Из условия динамической настройки следует, что $k = (\Omega^2/2)(2A_1 - D_1)$ [3]. Учитывая, что $A_1/A \ll 1$, $D_1/D \ll 1$, $D_1/A \ll 1$, и вводя обозначение $D/A = K$, получим уравнения (2) в виде

$$\begin{aligned}
&\alpha'' - (2-K)\beta' + (K-1)\alpha = \frac{2}{3}(K-1)\alpha^3 - \frac{1}{2}(2-K)\alpha^2\beta' + \\
&\qquad + (K-1)K(\beta'\beta^2 + \alpha\beta^2) - 2(K-1)\alpha'\beta'\beta, \\
&\beta'' + (2-K)\alpha' + (K-1)\beta = \frac{1}{2}(2-K)\alpha'\alpha^2 + \frac{2}{3}(K-1)\beta^3 + \\
&\qquad + (K-1)({\alpha'}^2\beta - 2\alpha'\beta^2 + \alpha^2\beta).
\end{aligned} \tag{3}$$

С помощью невырожденной линейной замены переменных (линейной нормализации)

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + y_2 + (K-1)y_3 + (K-1)y_4, \\
x_2 &= -y_1 + y_2 + y_3 - y_4, \\
x_3 &= y_1 - y_2 + (K-1)y_3 - (K-1)y_4, \\
x_4 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4
\end{aligned}$$

приведем систему (3) к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{d\tau_1} &= -y_2 + Y_1(y_1, y_2, y_3, y_4), \\
\frac{dy_2}{d\tau_1} &= y_1 + Y_2(y_1, y_2, y_3, y_4), \\
\frac{dy_3}{d\tau_1} &= (K-1)y_4 + Y_3(y_1, y_2, y_3, y_4), \\
\frac{dy_4}{d\tau_1} &= -(K-1)y_2 + Y_4(y_1, y_2, y_3, y_4),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $Y_i(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $i = \overline{1,4}$, — голоморфные функции своих аргументов, разложение которых начинается с членов третьего порядка. Система (1) имеет аналитический первый интеграл $V = T + \Pi$. Характеристическое уравнение линейной части системы (4) имеет две пары чисто мнимых корней: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = K - 1$.

Таким образом, система (1) является системой Ляпунова, позволяющей построить двухпараметрическое семейство периодических решений, которые порождаются каждой из собственных частот системы.

При отсутствии внутреннего резонанса ($\omega_1 \neq p\omega_2$, где p — целое число) построим периодическое решение, порождаемое частотой $\omega_1 = 1$.

Выполнив замену $\tau_1 = (\tau/\omega_1)(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots)$, найдем решение в виде рядов по степеням параметра c

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_n c^n y_1^{(n)}, \quad & y_2 &= \sum_n c^n y_2^{(n)}, \\ y_3 &= \sum_n c^n y_3^{(n)}, \quad & y_4 &= \sum_n c^n y_4^{(n)} \end{aligned} \tag{5}$$

с начальными условиями $\tau = 0$, $y_1 = c$, $y_2 = 0$. Подставим ряды (5) в систему (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра c.

Для нахождения $y_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\left(y_1^{(1)}\right)' = -y_2^{(1)}, \\ &\left(y_2^{(1)}\right)' = y_1^{(1)}, \\ &\left(y_3^{(1)}\right)' = (K-1)y_4^{(1)}, \\ &\left(y_4^{(1)}\right)' = -(K-1)y_3^{(1)}, \\ &y_1^{(1)}(0) = 1, \quad y_2^{(1)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений системы и начальных условий следует $y_1^{(1)} = \cos\tau$, $y_2^{(1)} = \sin\tau$.

Начальные условия для $y_3^{(1)}$, $y_4^{(1)}$ выбираем так, чтобы эти функции были периодическими по τ с периодом 2π. Отсюда получим $y_3^{(1)} \equiv 0$, $y_4^{(1)} \equiv 0$. Функции $y_i^{(2)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\left(y_1^{(2)}\right)' = -y_2^{(2)}, \\ &\left(y_2^{(2)}\right)' = y_1^{(2)}, \\ &\left(y_3^{(2)}\right)' = (K-1)y_4^{(2)}, \\ &\left(y_4^{(2)}\right)' = -(K-1)y_3^{(2)}, \\ &y_1^{(2)}(0) = y_2^{(2)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $y_1^{(2)} \equiv y_2^{(2)} \equiv y_3^{(2)} \equiv y_4^{(2)} \equiv 0$, поскольку $y_1^{(2)}(0)$ и $y_2^{(2)}(0)$ равны нулю. Решения $y_i^{(3)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, находим из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&\left(y_1^{(3)}\right)' = -y_2^{(3)} + Y_1^{(3)} - h_2 y_2^{(1)},\\
&\left(y_2^{(3)}\right)' = y_1^{(3)} + Y_2^{(3)} + h_2 y_1^{(1)},\\
&\left(y_3^{(3)}\right)' = (K-1) y_4^{(3)} + Y_3^{(3)} + h_2 (K-1) y_4^{(1)},\\
&\left(y_4^{(3)}\right)' = -(K-1) y_3^{(3)} + Y_4^{(3)} - h_2 (K-1) y_3^{(1)},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&Y_1^{(3)} = -M_1\cos^3\tau + M_2\sin^3\tau - \frac{1}{K}\cos\tau\sin^2\tau - M_3\cos^2\tau\sin\tau,\\
&Y_2^{(3)} = -M_2\cos^3\tau + M_1\sin^3\tau + M_3\cos\tau\sin^2\tau + \frac{1}{K}\cos^2\tau\sin\tau,\\
&Y_3^{(3)} - M_1\cos^3\tau + M_2\sin^3\tau - \frac{1}{K}\cos\tau\sin^2\tau - M_3\cos^2\tau\sin\tau,\\
&Y_4^{(3)} = -M_2\cos^3\tau + M_1\sin^3\tau + M_3\cos\tau\sin^2\tau + \frac{1}{K}\cos^2\tau\sin\tau,\\
&M_1 = \frac{K-1}{K}, \quad M_2 = \frac{7K-4}{6K}, \quad M_3 = \frac{3K-4}{2K}.
\end{aligned}
$$

Условие существования периодических решений имеет вид [2]

$$
\int_0^{2\pi} Y_1^{(3)}\cos\tau\,d\tau + \int_0^{2\pi} Y_2^{(3)}\sin\tau\,d\tau = 0,
$$

$$
-h_2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_1^{(3)}\sin\tau\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_2^{(3)}\cos\tau\,d\tau = 0.
$$

Первое из этих условий выполнено всегда, а из второго находим $h_2 = 0{,}5$. Тогда периодическое решение системы (6) имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&y_1^{(3)}(\tau) = -Q_1\cos\tau + Q_2\sin\tau - Q_3\sin 3\tau + Q_1\cos 3\tau,\\
&y_2^{(3)}(\tau) = -Q_1\sin\tau - Q_3\cos\tau - Q_1\sin 3\tau - Q_3\cos 3\tau,\\
&y_3^{(3)}(\tau) = -(2K)^{-1}\cos\tau + Q_4\sin\tau - Q_5\sin 3\tau - Q_6\cos 3\tau,\\
&y_4^{(3)}(\tau) = Q_4\cos\tau - (2K)^{-1}\sin\tau - Q_6\sin 3\tau + Q_5\cos 3\tau;
\end{aligned}
$$

здесь

$$
Q_1 = \frac{K-1}{6K}, \quad Q_2 = \frac{2-5K}{8K}, \quad Q_3 = \frac{2-K}{8K},
$$

$$
Q_4 = \frac{3K-2}{4K(K-2)}, \quad Q_5 = \frac{K-2}{4K(K+2)}, \quad Q_6 = \frac{2(K-1)}{3K(K-4)}.
$$

Найденное периодическое решение системы (4), порождаемое собственной частотой $\omega_1 = 1$ с точностью до c^3 включительно, для исходного времени имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= c\cos\varphi + c^3(-Q_1\cos\varphi + Q_2\sin\varphi - Q_3\sin 3\varphi + Q_1\cos 3\varphi) + \ldots,\\
y_2(t) &= c\sin\varphi + c^3(-Q_3\cos\varphi - Q_1\sin\varphi - Q_1\sin 3\varphi - q_3\cos 3\varphi) + \ldots,\\
y_3(t) &= c^3(-(2K)^{-1}\cos\varphi + Q_4\sin\varphi - Q_5\sin 3\varphi - Q_6\cos 3\varphi) + \ldots,\\
y_4(t) &= c^3(Q_4\cos\varphi - (2K)^{-1}\sin\varphi - Q_6\sin 3\varphi + Q_5\cos 3\varphi) + \ldots,
\end{aligned}
$$

где

$$
\varphi = \frac{\Omega t}{1 + \dfrac{1}{2}c^2 + \ldots},
$$

а период равен

$$
T = \frac{2\pi}{\Omega}\left(1 + \frac{1}{2}c^2 + \ldots\right).
$$

Аналогично процедура применяется для построения периодического решения с порождающей частотой $\omega_2 = K - 1$. Для этого выполним замену $\tau_1 = (\tau/\omega_2)(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots)$ и найдем решение системы (4) в виде рядов (5) с начальными условиями $\tau = 0$, $y_4 = c$, $y_3 = 0$.

Подставим ряды (5) в систему (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра c. Для нахождения $y_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\left(y_1^{(1)}\right)' &= -(K-1)^{-1}y_2^{(1)},\\
\left(y_2^{(1)}\right)' &= (K-1)^{-1}y_1^{(1)},\\
\left(y_3^{(1)}\right)' &= y_4^{(1)},\\
\left(y_4^{(1)}\right)' &= -y_3^{(1)},\\
y_4^{(1)}(0) = 1,&\quad y_3^{(1)}(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Из последних двух уравнений системы и начальных условий следует $y_4^{(1)} = \cos\tau$, $y_3^{(1)} = \sin\tau$. Начальные условия для $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$ выбираем так, чтобы эти функции были периодическими по τ с периодом 2π. Отсюда получим $y_1^{(1)} \equiv 0$, $y_2^{(1)} \equiv 0$. Функции $y_i^{(2)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
\left(y_1^{(2)}\right)' &= -(K-1)^{-1}y_2^{(2)},\\
\left(y_2^{(2)}\right)' &= (K-1)^{-1}y_1^{(2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(y_3^{(2)}\right)' &= y_4^{(2)},\\
\left(y_4^{(2)}\right)' &= -y_3^{(2)},\\
y_1^{(2)}(0) &= y_2^{(2)}(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда $y_1^{(2)} \equiv y_2^{(2)} \equiv y_3^{(2)} \equiv y_4^{(2)} \equiv 0$, поскольку $y_1^{(2)}(0)$ и $y_2^{(2)}(0)$ равны нулю. Решения $y_i^{(3)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, находим из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
\left(y_1^{(3)}\right)' &= -(K-1)^{-1}y_2^{(3)} + (K-1)^{-1}Y_1^{(3)} - h_2(K-1)^{-1}y_2^{(1)},\\
\left(y_2^{(3)}\right)' &= (K-1)^{-1}y_1^{(3)} + (K-1)^{-1}Y_2^{(3)} + h_2(K-1)^{-1}y_1^{(1)},\\
\left(y_3^{(3)}\right)' &= y_4^{(3)} + (K-1)^{-1}Y_3^{(3)} + h_2 y_4^{(1)},\\
\left(y_4^{(3)}\right)' &= -y_3^{(3)} + (K-1)^{-1}Y_4^{(3)} - h_2 y_3^{(1)},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
Y_1^{(3)} &= N_1\cos^3\tau + N_2\sin^3\tau + N_3\cos\tau\sin^2\tau + N_4\cos^2\tau\sin\tau,\\
Y_2^{(3)} &= -N_2\cos^3\tau - N_1\sin^3\tau - N_4\cos\tau\sin^2\tau - N_3\cos^2\tau\sin\tau,\\
Y_3^{(3)} &= N_1\cos^3\tau + N_2\sin^3\tau + N_3\cos\tau\sin^2\tau + N_4\cos^2\tau\sin\tau,\\
Y_4^{(3)} &= -N_2\cos^3\tau - N_1\sin^3\tau - N_4\cos\tau\sin^2\tau - N_3\cos^2\tau\sin\tau,
\end{aligned}
$$

$$
N_1 = \frac{(K-1)(9K-4-12K^2)}{6K}, \quad N_2 = \frac{(K-1)^3}{K},
$$
$$
N_3 = \frac{(K-1)(4-5K)}{2K}, \quad N_4 = \frac{(K-1)(3K-3K^2-1)}{K}.
$$

Условие существования периодических решений имеет вид

$$
\int_0^{2\pi} Y_4^{(3)}\cos\tau\,d\tau + \int_0^{2\pi} Y_3^{(3)}\sin\tau\,d\tau = 0,
$$

$$
-h_2 + \frac{1}{2\pi\omega_2}\int_0^{2\pi} Y_1^{(3)}\sin\tau\,d\tau - \frac{1}{2\pi\omega_2}\int_0^{2\pi} Y_2^{(3)}\cos\tau\,d\tau = 0.
$$

Первое из этих условий выполнено всегда, а из второго находим $h_2 = (1/2)(3K-1)$. Тогда периодическое решение системы (7) имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
y_1^{(3)}(\tau) &= R_1 \cos\tau - R_2 \sin\tau + R_3 \sin 3\tau + R_4 \cos 3\tau,\\
y_2^{(3)}(\tau) &= -R_2 \cos\tau + R_1 \sin\tau - R_4 \sin 3\tau - R_3 \cos 3\tau,\\
y_3^{(3)}(\tau) &= -R_5 \cos\tau - R_6 \sin\tau - R_6 \sin 3\tau + R_7 \cos 3\tau,\\
y_4^{(3)}(\tau) &= -R_6 \cos\tau + R_8 \sin\tau - R_5 \sin 3\tau + R_6 \cos 3\tau;
\end{aligned}
$$

здесь

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{(K-1)(2-3K)}{4K(2-K)}, \quad R_2 = \frac{(3K-1)(K-1)}{2K},\\
R_3 &= \frac{(3K^2-6K+4)(K-1)}{6K(4-3K)}, \quad R_4 = \frac{(K-1)(4K^2-5K+2)}{4K(3K-2)},\\
R_5 &= \frac{4K^2-5K+2}{8K}, \quad R_6 = \frac{3K^2-6K+4}{24K},\\
R_7 &= \frac{5K+4K^2+2}{8K}, \quad R_8 = \frac{4K^2+K-2}{8K}.
\end{aligned}
$$

Найденное периодическое решение системы (4), порождаемое собственной частотой $\omega_2 = K - 1$ с точностью до c^3 включительно, для исходного времени имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= c^3(R_1 \cos\gamma - R_2 \sin\gamma + R_3 \sin 3\gamma + R_4 \cos 3\gamma) + \ldots,\\
y_2(t) &= c^3(-R_2 \cos\gamma + R_1 \sin\gamma - R_4 \sin 3\gamma - R_3 \cos 3\gamma) + \ldots,\\
y_3(t) &= c\sin\gamma + c^3(-R_5 \cos\gamma - R_6 \sin\gamma - R_6 \sin 3\gamma + R_7 \cos 3\gamma) + \ldots,\\
y_4(t) &= c\cos\gamma + c^3(-R_6 \cos\gamma + R_8 \sin\gamma - R_5 \sin 3\gamma + R_6 \cos 3\gamma) + \ldots,
\end{aligned}
$$

где

$$
\gamma = \frac{\Omega t(K-1)}{A\left(1 + \dfrac{3K-1}{2}c^2 + \ldots\right)},
$$

а период равен

$$
T = \frac{2\pi}{\Omega(K-1)}\left(1 + \frac{1}{2}(3K-1)c^2 + \ldots\right).
$$

Таким образом, в рамках нелинейного анализа уравнений движения динамически настраиваемого гироскопа получены в явном виде поправки к собственным частотам нелинейных колебаний ротора. Полученные теоретические результаты учитываются при оценке погрешностей динамически настраиваемого гироскопа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966.
2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981.
3. Пельпор Д. С., Матвеев В. А., Арсеньев В. Д. Динамически настраиваемые гироскопы: Теория и конструкция. – М.: Машиностроение, 1988.
4. Филатов В. В., Шабаев В. И., Шаталов М. Ю. Влияние нелинейных эффектов на точность динамически настраиваемого гироскопа // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1981. – № 6.

Статья поступила в редакцию 30.10.2003

Ирина Геннадьевна Солдатенко родилась в 1971 г., окончила в 1998 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ассистент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех научных работ в области устойчивости гироскопических систем, нелинейных колебаний, стабилизации движения.

I.G. Soldatenko (b. 1971) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1998. Assistant of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications in the field of gyroscopic system stability, nonlinear oscillations, motion stability.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 621.313

В. М. Буянкин, В. М. Русаков

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ТОЧНОСТЬ РАБОТЫ МИКРОПРОЦЕССОРНОГО ПРИВОДА

Исследована цифровая модель привода, описываемая дифференциальными уравнениями. Проведено цифровое моделирование влияния внешнего возмущающего воздействия на точность работы микропроцессорного привода. Построены переходные процессы скорости и ошибок рассогласования микропроцессорного привода.

В настоящее время к статической и динамической точности работы цифрового микропроцессорного электропривода (ЦЭП) предъявляются повышенные требования. Особенно важна высокая стабильность работы при внешних возмущающих воздействиях.