

В. Л. Г о л с т о г у з о в

**ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ
ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ
РАЗНОСТЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ**

Оценена погрешность метода конечных разностей во временной области при решении задачи дифракции в однородной среде и задачи прохождения электромагнитной волны через границу раздела двух сред. Оценка погрешности производилась путем сравнения результатов решения задач, полученных классическим и численным методами.

Современное развитие интегральной оптики, оптических устройств хранения данных, ближнепольной и фазовой микроскопии, томографии и других устройств со сложными средами распространения электромагнитной волны требует совершенствования методов расчета. Очень часто при решении задач, связанных с такими средами, применимыми оказываются только численные методы.

Одним их таких методов является метод конечных разностей во временной области (Finit-difference Time-Domain, FDTD), в основе которого лежат дифференциальные уравнения Максвелла. Впервые этот метод был предложен в работе [1]. Однако широкое распространение он получил только в последнее время благодаря развитию вычислительной техники.

Метод FDTD находит все большее применение в задачах, где в сложной неоднородной анизотропной среде с поглощающими и проводящими элементами требуется найти пространственно-временное распределение амплитуды, частоты, фазы и поляризации электромагнитного поля. Для решения таких задач достаточно знать пространственно-временное распределение коэффициентов магнитной, диэлектрической проницаемости, проводимости и коэффициента поглощения, а если среда анизотропная — то значения тензоров соответствующих величин. Для еще более сложных сред, обладающих дисперсией, нелинейностью, дихроизмом и др., существует возможность дополнения метода FDTD необходимыми методиками расчета [2].

Из-за ограничения производительности современных персональных компьютеров наиболее эффективным этот метод оказывается при исследовании элементов радио- и оптического диапазона с линейными размерами, не превышающими 100 длин волн. Если необходимо увеличить объем среды численного анализа, то метод FDTD легко под-

дается распараллеливанию вычислений, что позволяет задействовать возможности компьютерных сетей.

В классической постановке [3, 4]

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$[\nabla \vec{H}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (2)$$

$$\nabla \vec{D} = 4\pi \rho, \quad (3)$$

$$\nabla \vec{B} = 0, \quad (4)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (6)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (7)$$

где \vec{E} и \vec{H} — электрический и магнитный векторы, \vec{D} и \vec{B} — векторы электрического смещения и магнитной индукции, \vec{j} — вектор плотности тока, ρ — плотность электрического заряда, σ — удельная проводимость, ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, c — скорость света, метод FDTD для решения задач нахождения электромагнитных полей в неоднородной диэлектрической среде без свободных зарядов основан на простой конечно-разностной дискретизации уравнений Максвелла (1) и (2) с использованием материальных уравнений (5)–(7). Для такого круга задач нет необходимости учитывать уравнения (3) и (4), поскольку погрешность, вносимая таким допущением, много меньше погрешности метода, зависящей от отношения шага сетки к длине волны.

Дискретизация заключается в создании сеток-массивов размером $L \times M \times N$ с дискретизованными по пространству свойствами среды в виде коэффициентов $\varepsilon(i, j, k)$, $\mu(i, j, k)$, $\sigma(i, j, k)$ и сеток со значениями трех проекций каждого из векторов $\vec{E}(i, j, k)$, $\vec{H}(i, j, k)$ и $\vec{j}(i, j, k)$. Здесь $i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, M$ и $k = 1, 2, \dots, N$ — координаты элемента сетки со значениями дискретизованных пространственных координат $(x, y, z)_{i,j,k}$. Шаг пространственной сетки обычно одинаков, т.е. $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. Для удобства вычисления первой производной по любой из координат сетки электрического магнитного полей смещены по отношению друг к другу во времени и пространстве на половину шага сетки.

С целью упрощения выкладок определим вид конечно-разностных уравнений для двумерной задачи с цилиндрическими поляризованными в плоскости x, y электромагнитными волнами, распространяющимися в неоднородной диэлектрической среде. Дифференциальные

уравнения Максвелла (1), (2) в этом случае преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{c}{\partial \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \quad (10)$$

Для этого случая вид сеток с размерами $L = 3$ и $M = 3$ с указанными значениями диэлектрической $\varepsilon(i, j)$ и магнитной $\mu(i, j)$ проницаемости представлен на рис. 1, а. Сетки взаимно смещены на половину шага по обеим координатам — i и j . Соответственно расположены массивы с проекциями электрического $E_x(i, j)$, $E_y(i, j)$ и магнитного $H_z(i, j)$ векторов (рис. 1, б). Первые два вектора лежат в плоскости расчета и совпадают с геометрическим положением коэффициента $\varepsilon(i, j)$, а вектор $H_z(i, j)$ перпендикулярен этой плоскости и соответствует геометрическому положению коэффициента $\mu(i, j)$. Таким образом, необходимо создать пять двумерных пространственных сеток $L \times M$.

Используя геометрию расположения векторов электромагнитного поля, представленную на рис. 1, можно получить конечно-разностные уравнения для решения уравнений (8)–(10):

$$\frac{H_{z_{i,j}}^{t+1/2} - H_{z_{i,j}}^{t-1/2}}{\Delta t} = -\frac{c}{\mu_{i,j}} \left(\frac{E_{y_{i,j+1}}^t - E_{y_{i,j-1}}^t}{\Delta x} - \frac{E_{x_{i+1,j+1}}^t - E_{x_{i-1,j-1}}^t}{\Delta y} \right), \quad (11)$$

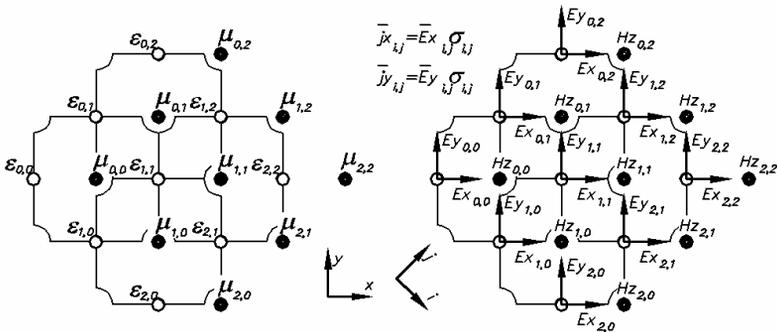


Рис. 1. Пример двумерной сетки размером 3×3 :

а — сетка значений коэффициентов диэлектрической и магнитной проницаемости, с помощью которой задаются характеристики среды; б — сетка векторов напряженности электрического и магнитного полей при решении уравнений Максвелла методом FDTD для цилиндрических волн, поляризованных в плоскости x, y

$$\frac{E_{x_{i,j}}^{t+1} - E_{x_{i,j}}^t}{\Delta t} = \frac{c}{\varepsilon_{i,j}} \left(\frac{H_{z_{i,j}}^{t+1/2} - H_{z_{i-1,j-1}}^{t+1/2}}{\Delta y} \right), \quad (12)$$

$$\frac{E_{y_{i,j}}^{t+1} - E_{y_{i,j}}^t}{\Delta t} = -\frac{c}{\varepsilon_{i,j}} \left(\frac{H_{z_{i-1,j}}^{t+1/2} - H_{z_{i,j-1}}^{t+1/2}}{\Delta x} \right). \quad (13)$$

Конечно-разностные уравнения (11)–(13) позволяют последовательно определить вектор $H_{z_{i,j}}^{t+1/2}$, затем $E_{x_{i,j}}^{t+1}$ и $E_{y_{i,j}}^{t+1}$ в точке (i, j) на основании известных значений полей вокруг этой точки в предыдущий момент времени. Каждое из этих уравнений последовательно применяется к каждому элементу (i, j) сетки в машинном цикле. Затем, после прибавления к текущему времени величины Δt , процедура повторяется сначала. Таким образом, при заданных начальных условиях цикл вычислительных процедур позволяет развернуть решение во времени. Результат считывается в нужный момент времени из массивов $E_{x_{i,j}}$, $E_{y_{i,j}}$ и $H_{z_{i,j}}$.

Условие устойчивости решения в случае двумерной задачи имеет следующий вид:

$$c < \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1/2}. \quad (14)$$

При решении задач методом FDTD источники излучения можно задавать в виде распределения векторов электромагнитного поля в начальный момент времени или с помощью граничных условий, определяющих закон изменения вектора поля в выбранном участке. Простейшими комбинациями законов изменения проекций этих векторов можно сформировать диаграмму направленности источника в виде сферы, кардиоиды, осциллятора, квадруполь и т.д.

Чтобы исключить отражение от границ расчетной области задаются граничные условия, соответствующие поглощающим стенкам. Они программируются так, чтобы за каждый временной интервал все поля в этих стенках уменьшались в определенное количество раз. При этом необходимо учитывать, что строгость условия устойчивости (14) может нарушаться. Существует много способов задания граничных условий, ссылки на самые известные из них можно найти в работе [2].

Примеры решения дифракционных задач методом FDTD с бесконечно длинными когерентными источниками излучения в виде полосы, расположенными в левой части поля расчета, показаны на рис. 2. При решении цилиндрическая волна движется слева направо. Белым цветом показано максимальное значение вектора $H_z(i, j)$, серым — значение вектора, равное нулю, черным — минимальное значение. Рисунки соответствуют моменту времени, когда волна достигла правой стенки области расчета. Из сравнения рис. 2, а и 2, б видно, как изменяется расходимость пучка при увеличении поперечного размера источника.

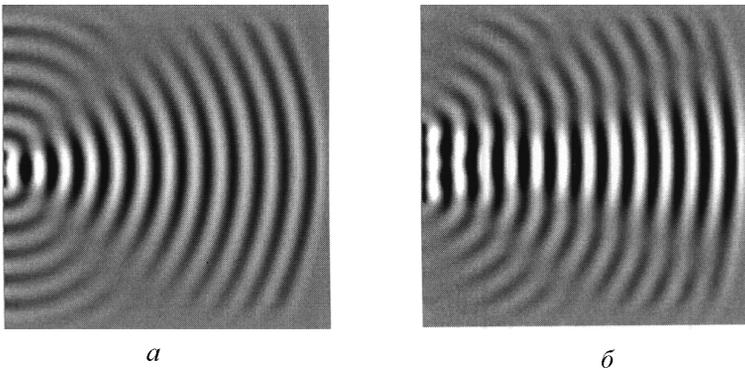


Рис. 2. Мгновенное распределение модуля магнитного вектора, образованное плосковыми когерентными источниками разной ширины:

a — $1,5\lambda$, *б* — 3λ

Падение слева направо под углом 45° гауссова волнового импульса длиной 3λ , где λ — длина волны, на границу раздела двух сред с показателем преломления первой среды $n_1 = 1$, второй — $n_2 = 1,732$ показано на рис. 3. На этом рисунке отчетливо видно наличие падающей, отраженной и преломленной волн.

Прохождение гауссова волнового пучка через плоскопараллельную градиентную цилиндрическую линзу с параболическим законом изменения показателя преломления от центра к краю показано на рис. 4. В центре пластины показатель преломления равен двум, а по краям — единице.

Волновые картины на рис. 2–4, полученные с помощью формул (11)–(13), качественно представляют процессы распространения электромагнитных волн в различных известных задачах. Для количественной и точностной оценок метода можно выполнить сравнение результатов решения известных задач, полученных численно и аналитически.

Одной из таких задач является задача дифракции, решаемая с помощью интеграла Кирхгофа, в основе которого лежит принцип Гюйгенса.

С использованием принципа Гюйгенса можно получить вполне точное выражение для распределения дифрагированного поля, если задать точные значения тангенциальных полей на поверхности источника [3]. Однако они обычно неизвестны,

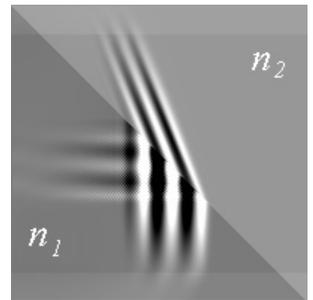


Рис. 3. Мгновенное распределение модуля магнитного вектора при падении слева направо гауссова волнового пучка длиной 3λ на границу раздела двух сред

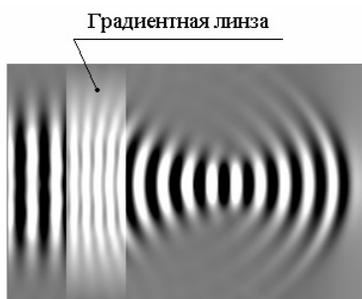


Рис. 4. Мгновенное распределение модуля магнитного вектора при прохождении гауссова волнового пучка через плоскопараллельную градиентную цилиндрическую линзу

поэтому при практических расчетах делают следующие допущения. Во-первых, полагают, что поле в излучающем отверстии такое же, как поле набегающей волны, т.е. пренебрегают возмущением поля на отверстии; в частности, не учитывают отражений волны от стенок отверстия. Во-вторых, принимают, что поле на остальной части отверстия равно нулю, т.е. пренебрегают поверхностной плотностью электрического тока, затекающего на теневую часть экрана. Если не принимать такие допущения, то согласно работе [3] принцип Гюйгенса позволяет получить значение интенсивности излучения, близкое к истинному, лишь при $kD > 3$, где k — волновое число (м^{-1}), а D — диаметр диафрагмы (м).

Чтобы исключить возможные погрешности, связанные с расчетом поля по принципу Гюйгенса, при расчете поля методом FDTD можно принять все эти допущения с достаточным запасом.

Так, для сравнительного анализа решения задачи дифракции, полученного с помощью интеграла Кирхгофа, и решения, полученного численным расчетом с помощью метода FDTD, зададим источник в виде бесконечно длинной полосы (рис. 5) с одинаковой амплитудой излучения по всей площади. Значения векторов электромагнитного поля во всем остальном пространстве в начальный момент времени приравня-

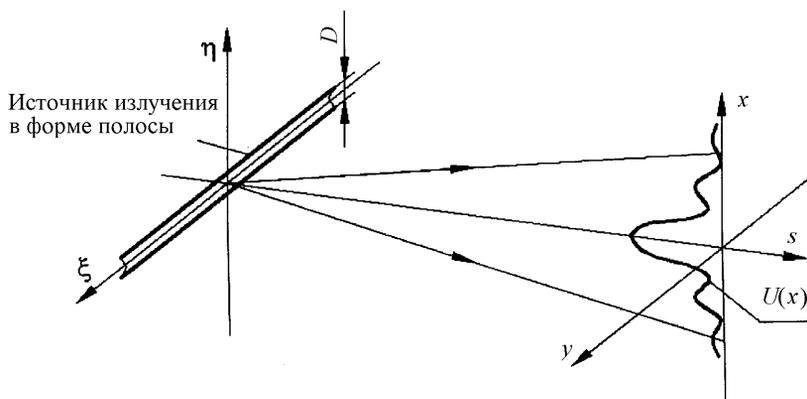


Рис. 5. Расчетная схема дифракционной картины для бесконечно длинного когерентного источника в форме полосы

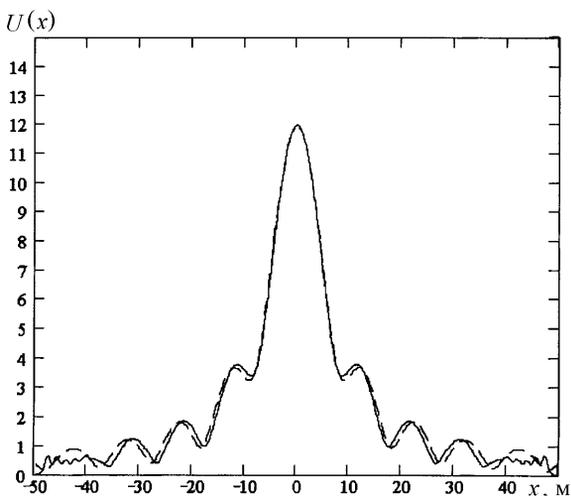


Рис. 6. Распределение амплитуды поля на расстоянии $s = 211,6\lambda$ от щели шириной $D = 20\lambda$ ($\lambda/\Delta x = 40$, $\lambda = 1$ м):

сплошная линия — численный расчет методом FDTD; штриховая линия — распределение поля по Кирхгофу

ем нулю, а также избавим пространство от каких-либо материальных тел. Ширину щели D выберем равной 20λ , при этом величину kD примем равной приблизительно 125. Расчет поля выполним на расстоянии более 100λ от источника.

В численном решении такой задачи будем использовать формулы (11)–(13). Выражение для интеграла Кирхгофа в этом случае имеет вид [4]

$$U(x) = \frac{1+i}{2\sqrt{2}\lambda} A \int_{-D/2}^{D/2} \frac{\exp(ik\sqrt{(x-\eta)^2+s^2})}{\sqrt{\sqrt{(x-\eta)^2+s^2}}} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{(x-\eta)^2+s^2}}\right) d\eta.$$

Результаты расчетов приведены на рис. 6.

Из сравнения результатов следует, что численному методу присуща погрешность в виде изменения масштаба дифракционной картины. Как показывают подобные численные расчеты для других расстояний от источника, эта погрешность постоянна. Возможной причиной такой ошибки может быть недостаточная степень дискретизации по пространству, которую удобнее всего определять через отношение длины волны к шагу сетки $\lambda/\Delta x$. Для получения результатов, представленных на рис. 6, отношение $\lambda/\Delta x$ принималось равным 20. Решение этой же задачи при $\lambda/\Delta x = 40$ показано на рис. 7. Таким образом, увеличение степени дискретизации приближает численное решение задачи дифракции к аналитическому решению, полученному с помощью интеграла Кирхгофа.

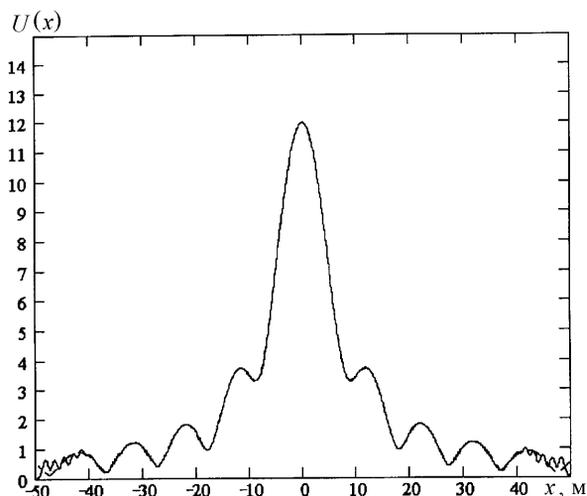


Рис. 7. Распределение амплитуды поля на расстоянии $s = 134,025\lambda$ от щели шириной $D = 20\lambda$ ($\lambda/\Delta x = 40$, $\lambda = 1$ м): сплошная линия — численный расчет методом FDTD; штриховая линия — распределение поля по Кирхгофу

На рис. 6 и 7 заметен еще один тип погрешности — биения с периодом λ на периферийных участках графика дифракционной картины из-за отражения волны от краев зоны расчета. Эта погрешность может быть легко устранена путем увеличения размера зоны расчета либо введения на краях поглощающей зоны большей ширины.

Рассмотрим еще одну важную задачу в теории электродинамики — прохождение электромагнитной волны через границу раздела двух сред. Это позволит определить погрешности, возникающие при расчете электромагнитных волн в средах с неоднородным значением показателя преломления.

В классической теории коэффициент отражения волны, поляризованной в плоскости падения, описывается формулой Френеля

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}, \quad (15)$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления первой и второй сред, θ_1 — угол падения, θ_2 — угол преломления.

Из этой формулы определяется условие, при котором отсутствует отраженная волна — эффект Брюстера.

Если угол θ_1 принять равным 60° , показатель преломления n_1 равным единице и варьировать показатель преломления n_2 , то график модуля коэффициента отражения имеет вид, соответствующий сплошной линии на рис. 8. На этом же рисунке представлены результаты расчета коэффициента отражения, полученные численным методом FDTD, для

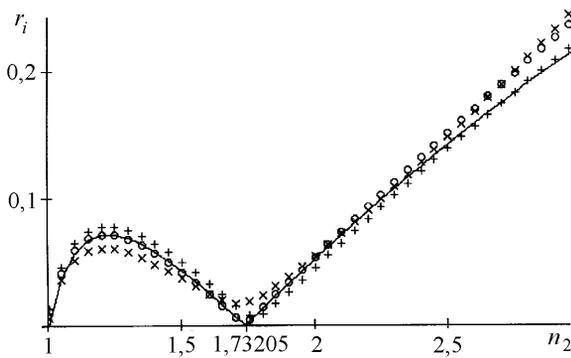


Рис. 8. График модуля коэффициента отражения поляризованной в плоскости падения волны, проходящей через границу раздела двух сред, как функция показателя преломления второй среды:

сплошная линия — зависимость, полученная по формуле Френеля; \times , \circ и $+$ — численный расчет методом FDTD для отношения $\lambda/\Delta x$, равного соответственно 12, 16 и 20

различного числа дискретизаций на длину волны $\lambda/\Delta x$. Этот график показывает, как изменяется точность расчета в зависимости от степени дискретизации $\lambda/\Delta x$.

По полученным данным можно сделать вывод, что ошибку ε численного метода FDTD (в %) можно приблизительно представить как функцию отношения $\lambda/\Delta x$:

$$\varepsilon \leq \frac{\Delta x}{\lambda} \cdot 100 \%$$

Для некоторых частных случаев можно определить законы искажения результатов и внести соответствующую поправку, не прибегая к увеличению степени дискретизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Y e e К. Numerical Solutions of Initial Boundary Value Problems involving Maxwell's Equations in Isotropic Media // IEEE Ant. and Prop. – 1966. – V. 33. – P. 302–307.
2. S h l a g e r K. L., S c h n e i d e r J. B. A Selective Survey of the Finite-Difference Time-Domain Literature // IEEE Ant. and Prop. – 1995. – V. 37. – № 4. – P. 39–56.
3. В а й н ш т е й н Л. А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.
4. А х м а н о в С. А., Н и к и т и н С. Ю. Физическая оптика. – М.: Изд-во МГУ, 1998.

Статья поступила в редакцию 27.06.2002

Виктор Леонидович Толстогузов родился в 1979 г. Студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области математического моделирования.

V.L. Tolstoguzov (b. 1979), student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of mathematical simulation.