

А. А. Тимофеев, А. М. Шанин,  
И. М. Якимов

## **ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В УСЛОВИЯХ КОМБИНИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

*На основе аппарата марковских процессов исследована плотность распределения вероятностей фазовых координат дискретной системы фазовой синхронизации с астатическим фильтром в цепи управления в условиях комбинированных случайных воздействий, представляющих собой аддитивный гауссовский шум и фазовые гауссовские флуктуации. Предложена методика построения и численного решения векторного уравнения Колмогорова–Чепмена. Выполнена параметрическая оптимизация модели с целью минимизации дисперсии фазовой ошибки.*

В мире современных телекоммуникаций большое распространение получили системы фазовой синхронизации (СФС). Интерес к этому классу устройств обусловлен возможностью решать с их помощью самые разнообразные задачи с качеством, близким к оптимальному: слежение за несущими частотами принимаемых сигналов, когерентная демодуляция сигналов с частотной и фазовой модуляцией, измерение частоты и фазы сигналов, следящая фильтрация, синтез частот и др. В последние годы проводятся исследования в области СФС с элементами дискретизации, что связано с совершенствованием элементной базы микроэлектроники и возрастанием рабочих частот.

В то же время, несмотря на давний интерес к системам синхронизации, некоторые вопросы, касающиеся их функционирования, остаются неизученными — например, вопросы, связанные со сложными флуктуационными воздействиями на эти системы. Если анализ поведения дискретных СФС в условиях помехи, представляющей собой аддитивный белый гауссовский шум, выполнен в целом ряде работ [1], то влияние комбинированных флуктуационных воздействий, включающих в себя и аддитивный гауссовский шум, и фазовые флуктуации, на поведение этих систем изучено в значительно меньшей степени. Этой теме посвящено мало работ, в них исследованы линейные модели. Мало изучены также вопросы оптимизации параметров, обеспечивающих наивысшее качество функционирования СФС. Оптимизация этих параметров является крайне актуальной задачей, поскольку по отношению

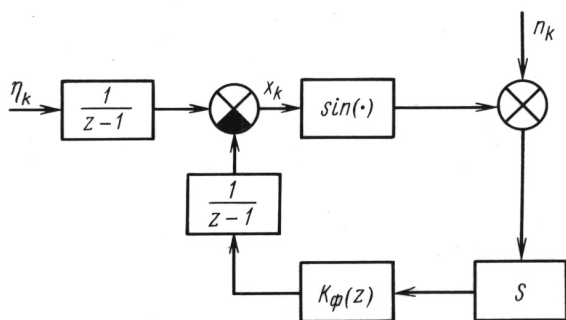
к перечисленным воздействиям система себя ведет противоречиво и, следовательно, существует необходимость поиска оптимальных параметров.

В настоящей работе изучается зависимость статистических характеристик дискретной системы фазовой синхронизации с учетом нелинейных свойств от ее параметров с целью получения оптимального набора этих параметров. При этом учитываются следующие воздействия на устройство: аддитивный белый гауссовский шум (традиционно для задач такого типа) и фазовые флуктуации входного сигнала, которые могут быть обусловлены различными причинами (отличительная особенность настоящей работы, это воздействие моделировалось в виде частотного белого гауссовского шума).

Объектом исследования является дискретная СФС с астатизмом второго порядка. Современные технологии характеризуются постепенным переходом на цифровую технику, обладающую определенными преимуществами перед аналоговой. Этим объясняется выбор дискретной системы для изучения. От цифровой она отличается отсутствием эффектов квантования, но ими зачастую можно пренебречь. Иногда (например, в системах когерентной обработки информации) важным требованием к СФС является наличие нулевой фазовой ошибки. Поэтому в настоящей работе изучается система с астатизмом второго порядка, функционирующая без фазовой ошибки.

В качестве критерия оптимальности используется минимум дисперсии фазовой ошибки. Особенностью настоящей работы является использование метода марковских процессов для анализа поведения системы [2]. Этот метод позволяет изучать свойства нелинейных систем, что весьма важно для таких нелинейных устройств, как СФС.

**Математическая модель.** Функциональная схема исследуемой системы представлена на рис. 1; здесь  $\eta_k$  — частотный шум входного сигнала;  $n_k$  — белый аддитивный шум, пересчитанный на выход фазового



**Рис. 1. Функциональная схема дискретной системы фазовой синхронизации при наличии частотного и аддитивного шумов**

детектора;  $K_{\phi}(z)$  — передаточная функция фильтра в цепи управления СФС;  $x_k$  — фазовая ошибка;  $S$  — крутизна характеристики перестраиваемого генератора.

Отметим, что в схеме на рис. 1 опущены источники сигнала, отвечающие за детерминированную составляющую фазы входного сигнала и собственную частоту перестраиваемого генератора. Их влияние сводится лишь к появлению начальной расстройки частоты в уравнении системы. Далее будет показано, что для рассматриваемой системы наличие начальной расстройки частоты не влияет на процессы. Такой подход позволяет не усложнять схему, в то же время учитывая в ней основные источники флуктуационных воздействий.

Для применения аппарата марковских процессов необходимо построить математическую модель рассматриваемой системы и привести ее к марковскому виду. Уравнение СФС в  $z$ -области имеет вид [3]

$$zx(z) - x(z) = \omega_n(z) + \eta(z) - SK_{\phi}(z)(\sin x(z) + n(z)), \quad (1)$$

где  $x$  — фазовая ошибка;  $\eta$  — частотные флуктуации;  $n$  — аддитивный широкополосный шум, пересчитанный внутрь кольца;  $\omega_n$  — начальная расстройка частоты.

В качестве фильтра в цепи управления выбран пропорционально-интегрирующий фильтр с коэффициентом передачи

$$K_{\phi}(z) = \frac{1}{z-1} + m, \quad (2)$$

обеспечивающим астатизм второго порядка; здесь  $m$  — коэффициент форсирования фильтра.

Таким образом, реакцией системы на скачок по частоте является нулевая фазовая расстройка. Это уменьшает вероятность перескока фазовой ошибки на соседний период характеристики фазового детектора, увеличивая время до срыва слежения.

Подставив выражение (2) в уравнение (1), получим следующее уравнение СФС в  $z$ -области:

$$zx(z) - x(z) = \omega_n(z) + \eta(z) - S \left( \frac{mz + (1-m)}{(z-1)} \right) (\sin x(z) + n(z)).$$

После выполнения обратного  $z$ -преобразования получим

$$x_{k+2} = 2x_{k+1} - x_k + \eta_{k+1} - \eta_k - Sm \sin x_{k+1} - Smn_{k+1} + S(m-1) \sin x_k + S(m-1)n_k. \quad (3)$$

Для построения марковской модели системы требуется задать модели входных воздействий. В настоящей работе предполагается, что процессы  $n$  и  $\eta$  являются белыми гауссовскими шумами с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $\sigma_n^2$  и  $\sigma_\eta^2$  соответственно. Уравнение (3) не описывает марковский процесс, поскольку текущее состояние системы зависит не только от предыдущего состояния, но и от более ранних. Для устранения этого вводится новая переменная  $y$  по следующему правилу:

$$y_{k+1} = 2x_{k+1} - x_k - \eta_k + S(m-1)n_k + S(m-1)\sin x_k.$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -Sm \sin x_k + y_k + (\eta_k - Smn_k), \\ y_{k+1} &= -x_k - S(m+1)\sin x_k + 2y_k + (\eta_k - S(m+1)n_k). \end{aligned} \quad (4)$$

Данная система является марковской. Выразив из системы уравнений (4) шумовые воздействия  $\eta_k$  и  $n_k$ , получим

$$\begin{aligned} \eta_k &= (m+1)x_{k+1} - my_{k+1} - mx_k + (m-1)y_k, \\ n_k &= \frac{1}{S}(x_{k+1} - y_{k+1} - x_k + y_k - S \sin x_k). \end{aligned} \quad (5)$$

Условная вероятность перехода в таком случае имеет вид

$$q(x_{k+1}, y_{k+1} | x_k, y_k) = \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_n S} \exp\left(-\frac{\eta_k^2}{2\sigma_\eta^2}\right) \exp\left(-\frac{n_k^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (6)$$

где  $\eta_k$  и  $n_k$  определены согласно выражениям (5).

Уравнение Колмогорова–Чепмена для системы второго порядка имеет вид [4]

$$W_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_{k+1}, y_{k+1} | x_k, y_k) W_k(x_k, y_k) dx_k dy_k, \quad (7)$$

где  $W_k$  — плотность распределения вероятности фазовых координат на  $k$ -м шаге. Данное уравнение может быть решено численно, но для этого необходимо проделать некоторые преобразования. С точки зрения наблюдателя не существует разницы между значениями фазовой ошибки, отличающимися на  $2\pi n$ . Поэтому фазовое пространство можно свернуть благодаря наличию инвариантных точек (поведение системы в окрестности инвариантных точек одинаково) [5]. Для того чтобы найти инвариантные точки, воспользуемся системой (4), примем  $\eta_k = 0$ ,  $n_k = 0$  и получим

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -Sm \sin x_k + y_k, \\ y_{k+1} &= -x_k - S(m+1)\sin x_k + 2y_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Найдем такие числа  $T_1$  и  $T_2$ , при которых следующая подстановка не изменяет систему (8):

$$\begin{aligned} x' &= x + T_1, \\ y' &= y + T_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Эти числа легко найти, они имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi l, \\ T_2 &= 2\pi l \end{aligned} \quad (10)$$

(число  $l$  одно и то же для  $T_1$  и  $T_2$ ).

Затем найдем такую область в фазовом пространстве, чтобы любая точка фазового пространства за счет инвариантного преобразования (9) отображалась в эту область (рис. 2). Эта задача не имеет единственного решения, та или иная область выбирается из соображений удобства. В настоящей работе выбрана область  $-\pi \leq x \leq \pi$ , где  $x$  соответствует фазовой ошибке.

После преобразований (9), (10) можно, используя суммирование и заменив бесконечные пределы интегрирования по координате  $x$  на конечные, представить векторное уравнение (7) в следующем виде:

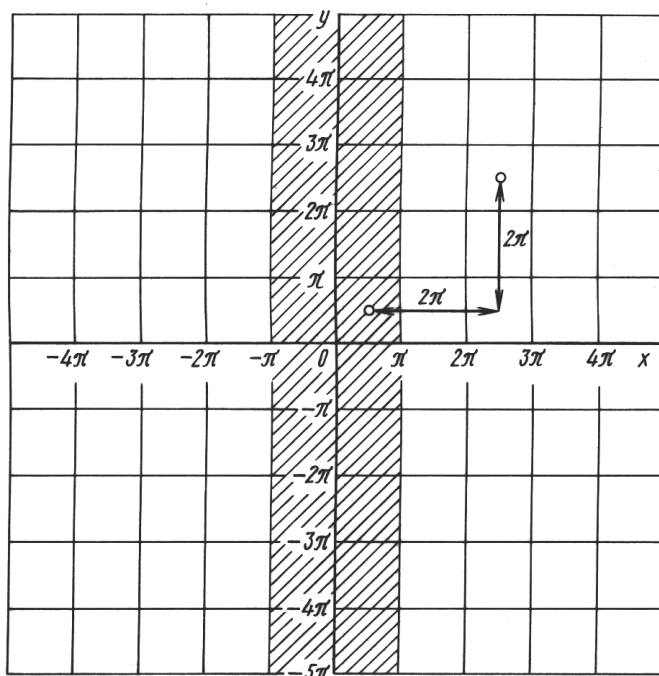


Рис. 2. Область в фазовом пространстве

$$W_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} q(x_{k+1} + 2\pi l, y_{k+1} + 2\pi l | x_k, y_k) W_k(x_k, y_k) dx_k dy_k. \quad (11)$$

Подынтегральная функция быстро убывает по экспоненциальному закону, поэтому на практике приемлемая точность обеспечивается при  $l = 3 \dots 5$ . По той же причине интегрирование в бесконечных пределах можно заменить интегрированием в диапазоне от  $-2\pi j$  до  $+2\pi j$ . При  $j = 5$  получим

$$W_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) = \int_{-10\pi}^{+10\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{l=-5}^{+5} q(x_{k+1} + 2\pi l, y_{k+1} + 2\pi l | x_k, y_k) W_k(x_k, y_k) dx_k dy_k. \quad (12)$$

По данной формуле проводился расчет двумерной плотности распределения вероятности переменных состояния системы. Для того чтобы получить плотность распределения вероятности фазовой ошибки, двумерная плотность распределения вероятности переменных состояния системы интегрировалась по координате  $y$ :

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y) dy.$$

Для нахождения дисперсии фазовой ошибки использовалась формула

$$\sigma_x^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} x^2 W(x) dx,$$

в которой учитывается, что среднее значение фазовой ошибки в системе с астатизмом второго порядка равно нулю, а также что плотность распределения вероятности  $x$  свернута в интервал от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

**Анализ статистических характеристик системы.** Численное решение уравнения (12) позволяет получить двумерную плотность распределения вероятности переменных состояния системы. С ее помощью вычислены значения дисперсии фазовой ошибки для различных значений параметров системы и мощностей шумов. На основе этих результатов получены линии (рис. 3), вдоль которых дисперсия фазовой ошибки принимает определенное значение (не изменяется). Назовем их изолиниями. Все изолинии имеют разное значение фазовой ошибки и

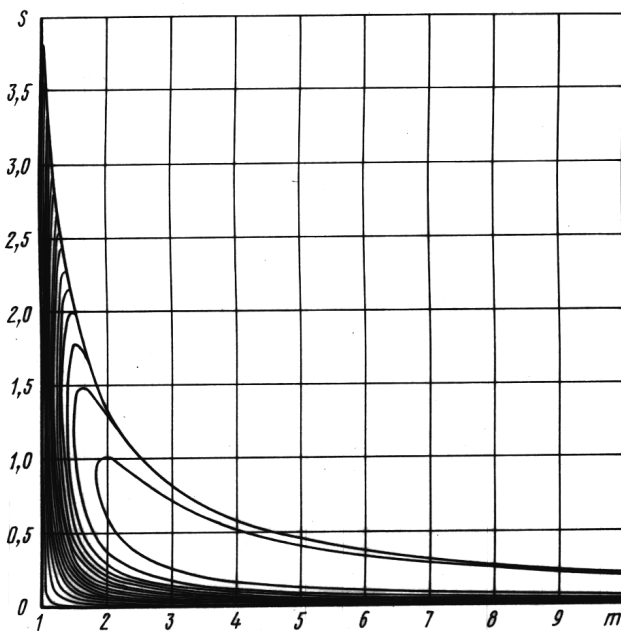
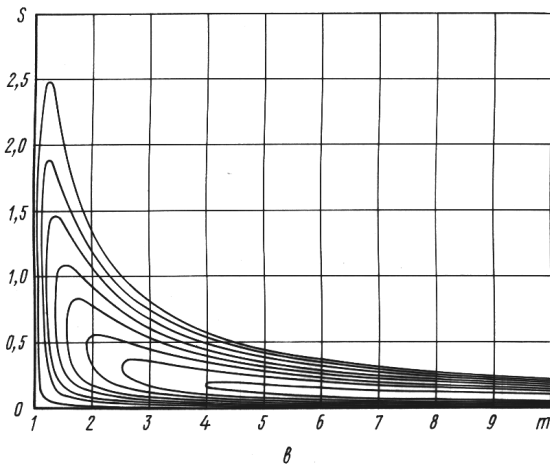
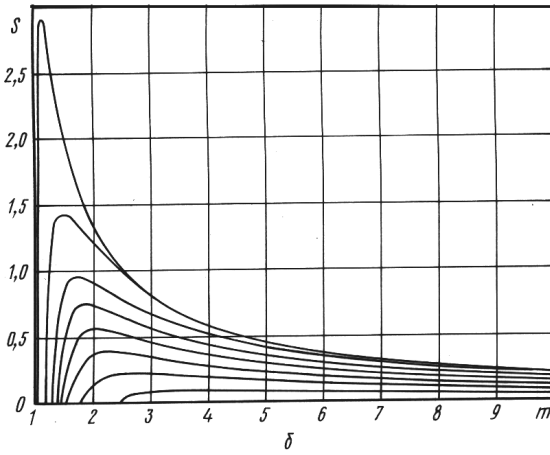
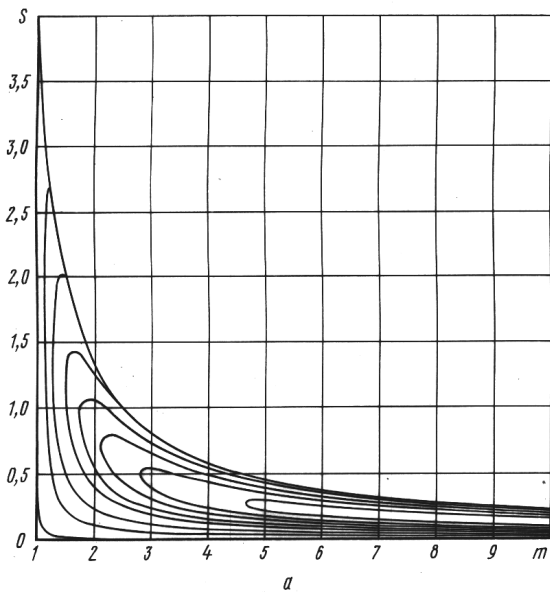


Рис. 3. Изолинии на плоскости параметров системы

ограничивают односвязную область, внутри которой дисперсия меньше этой ошибки, а на границе — равна ей. Шаг, с которым выбирались значения дисперсии, фиксированный, это приводит к неравномерному заполнению изолиниями всей области параметров. Ближе к границе плотность изолиний возрастает, поскольку здесь значение дисперсии фазовой ошибки сильно зависит от выбора параметров системы, и, наоборот, в самой вложенной области дисперсия фазовой ошибки почти не изменяется при значительном изменении параметров.

Введем параметр  $g = \sigma_{\eta}^2 / \sigma_n^2$ . Анализ результатов показывает, что форма изолиний зависит только от  $g$ . Под этим понимается следующее. Пусть для некоторого  $g$  получена изолиния с соответствующим значением дисперсии фазовой ошибки  $\sigma_{x_1}^2$ . Не изменяя значения  $g$ , изменим параметры входных воздействий  $\sigma_n^2$  и  $\sigma_{\eta}^2$ . Тогда этой изолинии будет соответствовать другое значение дисперсии фазовой ошибки  $\sigma_{x_2}^2$ . На рис. 4 представлены изолинии для различных значений параметра  $g$ .

В настоящей работе рассмотрена задача определения оптимальных параметров системы, обеспечивающих минимум дисперсии фазовой ошибки при фиксированных параметрах случайных воздействий. Как показывает анализ, такая задача не может быть решена без наложения дополнительных условий. В случае наличия таких случайных воздействий значение дисперсии фазовой ошибки уменьшается при увеличении значения  $m$ . При этом значение  $S$  устремляется к нулю, чтобы



**Рис. 4. Форма изолиний при  $g \gg 1$  (а),  $g \ll 1$  (б) и  $g = 1$  (в)**



произведение  $Sm$  оставалось фиксированной величиной (рис. 5). Для каждого значения параметра  $m$  находились оптимальные значения параметра  $S_{\text{опт}}$ . Видно, что кривые на рис. 5 асимптотически стремятся к некоторым константам, монотонно убывая.

Из рис. 5, б видно, что минимум при конечных значениях параметров отсутствует. При  $m > 5$  дисперсия фазовой ошибки изменяется очень незначительно. Значение, к которому приближается кривая на

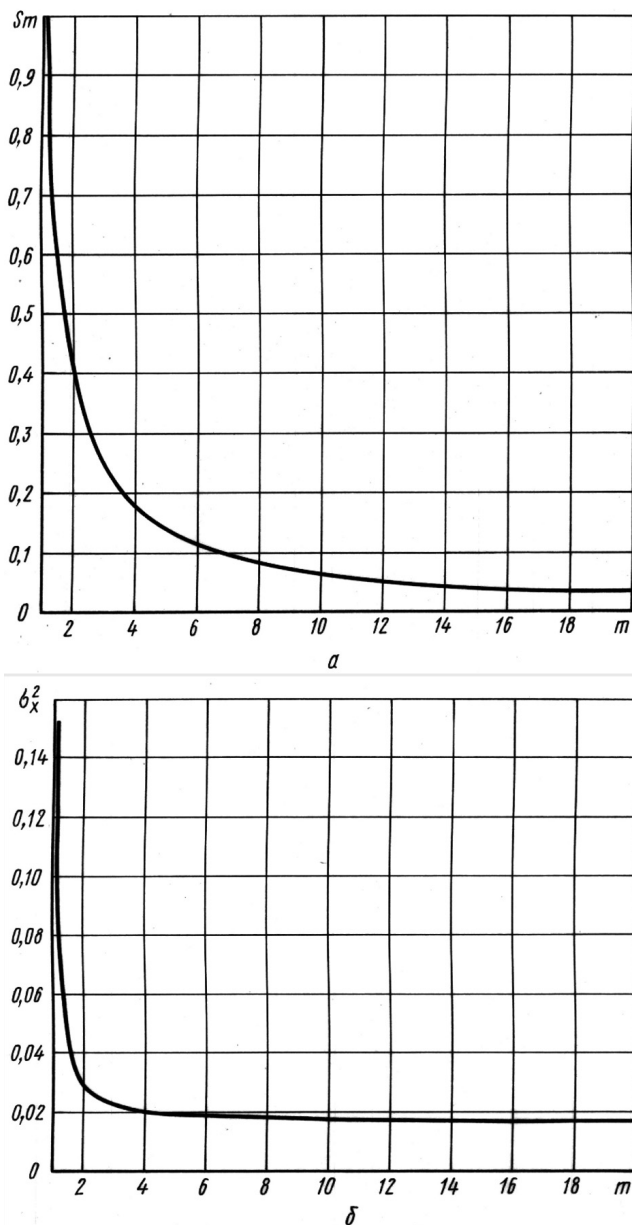


Рис. 5. Зависимость значения  $S_{\text{опт}}m$  (а) и параметра  $\sigma_x^2$  (б) от параметра  $m$

рис. 5,  $a$ , зависит только от величины  $g$ . С возрастанием  $g$  это значение увеличивается.

Для ограничения значения коэффициента форсирования  $m$  на систему должны быть наложены дополнительные условия. В настоящей работе этими условиями является наличие определенного запаса устойчивости системы. Рассмотрим это понятие более подробно.

Уравнение СФС при нулевых случайных воздействиях имеет вид

$$x_{k+2} = 2x_{k+1} - x_k - Sm \sin x_{k+1} + S(m - 1) \sin x_k. \quad (13)$$

Линеаризовав данное уравнение в окрестности состояний равновесия, получим характеристическое уравнение

$$z^2 + (Sm - 2)z + (1 + S(1 - m)) = 0, \quad (14)$$

имеющее корни

$$z_{1,2} = \frac{-(Sm - 2) \pm \sqrt{(Sm - 2)^2 - 4(1 + S(1 - m))}}{2}.$$

При  $|z_{1,2}| < 1$  система устойчива.

В настоящей работе используется понятие “запас устойчивости  $\zeta$ ” (рис. 6). Запас устойчивости в 25 % соответствует кругу радиуса 0,75 на комплексной плоскости  $z$  (на рисунке круг заштрихован).

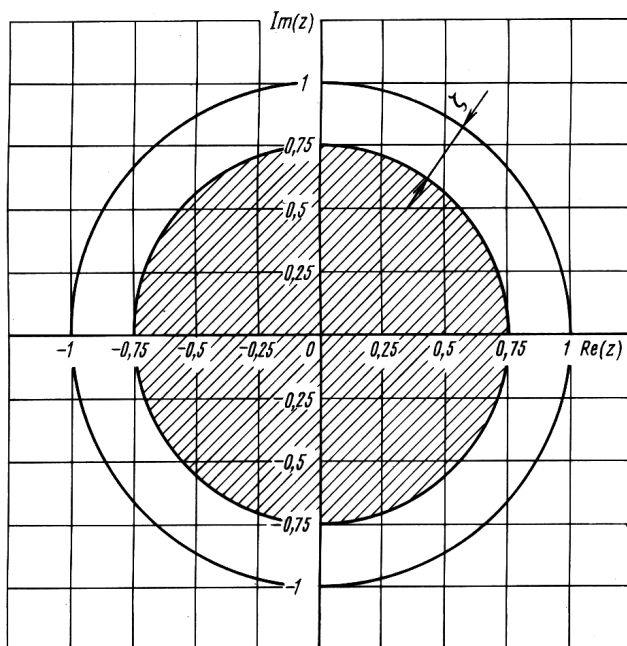
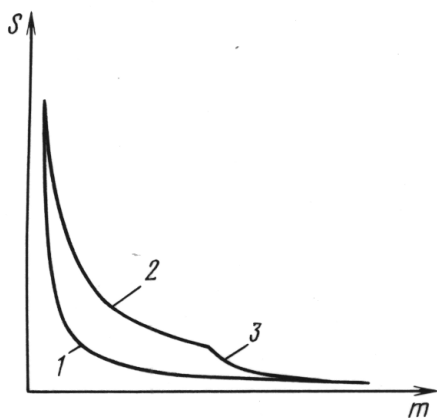


Рис. 6. К понятию “запас устойчивости”



**Рис. 7.** Кривые, ограничивающие область, которая содержит значения запаса устойчивости, превышающие заданное значение:  
 1 —  $S_1(m)$ , 2 —  $S_2(m)$ , 3 —  $S_3(m)$

В области параметров круг радиуса, соответствующего определенному значению  $\zeta$ , переходит в фигуру, ограниченную кривыми  $S_1(m)$ ,  $S_2(m)$ ,  $S_3(m)$  (рис. 7):

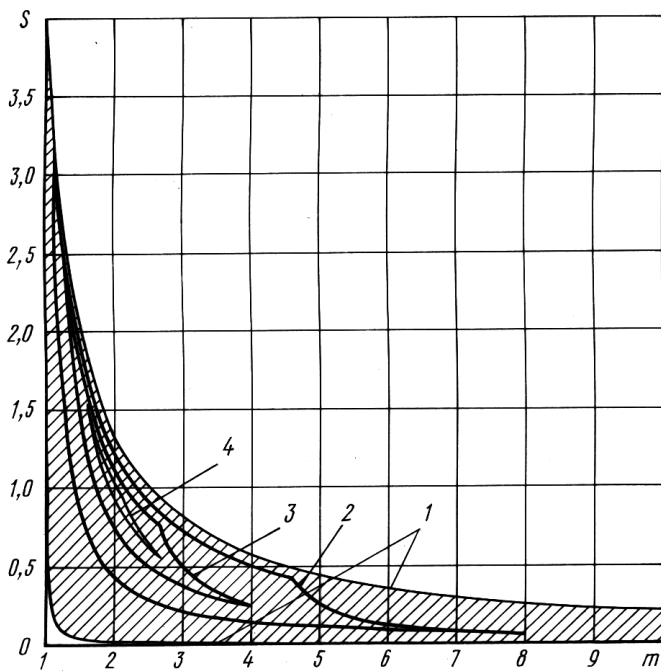
$$S_1(m) = \frac{1 - (1 - \zeta)^2}{m - 1} \quad \text{при} \quad \frac{2(1 - (1 - \zeta))}{1 - (1 - \zeta)^2} \leq m \leq \frac{2(1 + (1 - \zeta))}{1 - (1 - \zeta)^2},$$

$$S_2(m) = \frac{(1 + (1 - \zeta))^2}{(1 + (1 - \zeta))m - 1} \quad \text{при} \quad \frac{2(1 - (1 - \zeta))}{1 - (1 - \zeta)^2} \leq m \leq \frac{2}{1 - (1 - \zeta)^2},$$

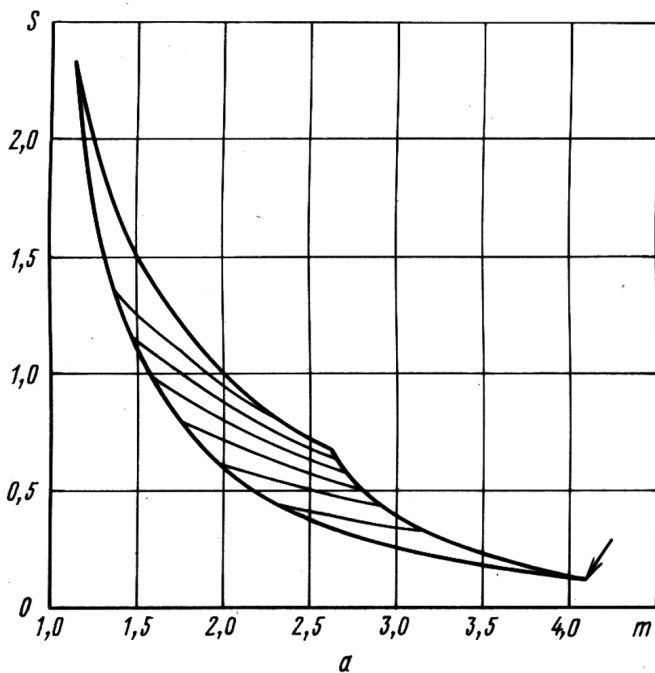
$$S_3(m) = \frac{(1 - (1 - \zeta))^2}{(1 - (1 - \zeta))m - 1} \quad \text{при} \quad \frac{2}{1 - (1 - \zeta)^2} \leq m \leq \frac{2(1 + (1 - \zeta))}{1 - (1 - \zeta)^2}.$$

На рис. 8 показано положение кривых равной устойчивости в плоскости параметров, на которых система имеет фиксированное значение параметра  $\zeta$ . Выбор параметров из области внутри такой кривой гарантирует нахождение корней внутри круга радиуса  $1 - \zeta$  на комплексной плоскости  $z$ . Следует отметить, что полученные области не зависят ни от каких внешних факторов. Понятие “запас устойчивости” имеет следующее практическое значение. Чем больше параметр  $\zeta$ , тем меньше длительность переходных процессов в системе.

**Оптимизация параметров системы с учетом запаса устойчивости.** В настоящей работе рассмотрена задача нахождения оптимальных параметров исследуемой системы при наложенном условии, что запас ее устойчивости не должен быть меньше некоторого фиксированного значения  $\zeta$ . На рис. 9 показаны области, внутри которых выполняется наложенное условие. Стрелками показаны значения параметров, при которых в данных областях дисперсия фазовой ошибки минимальна.



**Рис. 8. Кривые равной устойчивости на плоскости параметров:**  
 $\zeta = 1\%$  (1),  $25\%$  (2),  $50\%$  (3),  $75\%$  (4)



**Рис. 9 (начало)**

Из рис. 9 видно, что при  $g > 1$  оптимальные параметры, соответствующие минимуму дисперсии фазовой ошибки, лежат на кривой

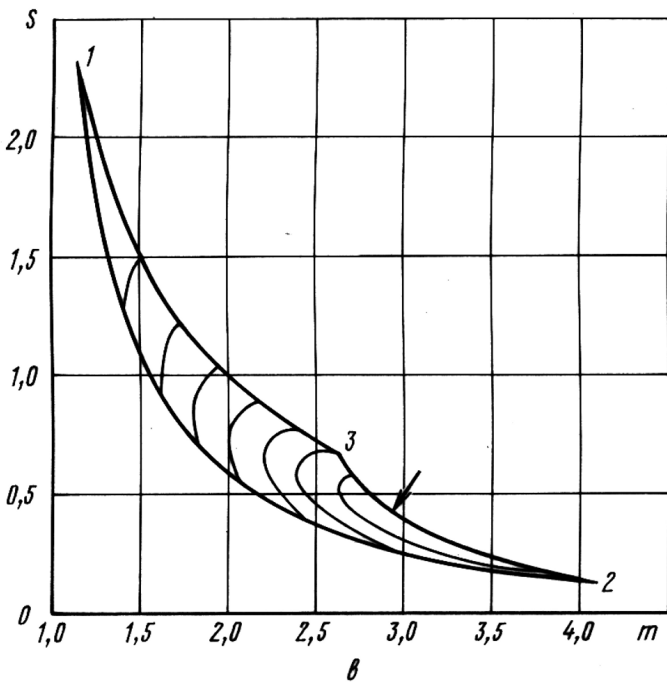
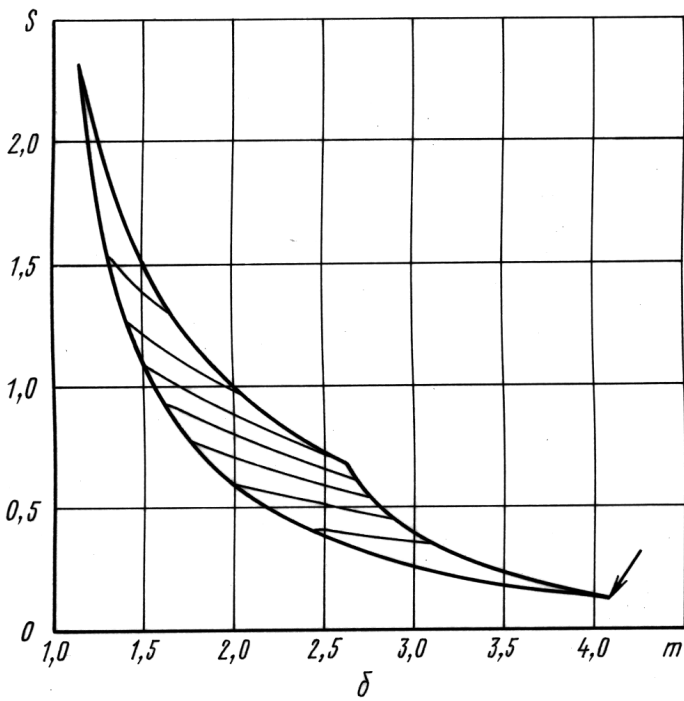


Рис. 9 (окончание). Области, содержащие оптимальные значения параметров исследуемой системы, при фиксированном запасе устойчивости, равном 50 %, для  $g = 1/81$  (а),  $g = 1$  (б),  $g = 81$  (в)

$S_3(m)$ . При уменьшении  $g$  они двигаются по этой кривой в направлении точки 2.

**Выводы.** 1. Без наложения дополнительных условий задача минимизации фазовой ошибки не может быть решена для конечных значений параметров  $m$  и  $S$ .

2. При фиксированном запасе устойчивости значения оптимальных параметров зависят только от  $g$  и не зависят от конкретных значений дисперсий случайных воздействий.

3. Дисперсия фазовой ошибки монотонно убывает с увеличением параметра  $m$ . Зависимость от параметра  $S$  имеет более сложный вид.

4. Оптимальные (с учетом дополнительного условия) значения параметров лежат на кривой  $S_3(m)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахтарин Б. И. Статистическая динамика систем синхронизации. – М.: Радио и связь, 1998.
2. Шахтарин Б. И. Случайные процессы в радиотехнике. – М.: Радио и связь, 2000.
3. Казakov Л. Н. Математическое моделирование дискретных систем с частотным управлением. – Ярославль: Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова, 1993.
4. Марковская теория оценивания в радиотехнике / Под ред. М.С. Ярлыкова. – М.: Радиотехника, 2004.
5. Казakov Л. Н., Башмаков М. В. Математические модели стохастических цифровых систем фазовой синхронизации. – Ярославль: Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова, 2001.

Статья поступила в редакцию 28.06.2004

Александр Анатольевич Тимофеев родился в 1973 г., окончил в 1996 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Начальник управления связи ОАО Нефтеналивного пароходства "Волга-Танкер". Автор около 10 научных работ в области систем фазовой синхронизации.

A.A. Timofeev (b. 1973) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1996. Chief of the communication department of the public joint-stock company of the oil tank steamship line "Volga-Tanker". Author of about 10 publications in the field of systems of phase synchronization.



Андрей Михайлович Шанин родился в 1982 г. Студент Ярославского гос. ун-та им. П.Г. Демидова. Специализируется в области систем фазовой синхронизации и телекоммуникаций.

A.M. Shanin (b. 1982). Student of the Yaroslavl State University n.a. P.G. Demidov. Specializes in the field of systems of phase synchronization and telecommunications.