УДК 681.51

СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЛЕНТОЧНЫХ КРИТЕРИЕВ*

Н.Е. Зубов[1,2], **Е.А. Микрин**[1,2], **М.Ш. Мисриханов**[2], **В.Н. Рябченко**[1,2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: nezubov@bmstu.ru

[2]ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”,
г. Королёв, Московская область, Российская Федерация
e-mail: nezubov@bmst.ru; Nikolay.Zubov@rsce.ru

Рассмотрена проблема управления спектром матрицы или заданного размещения полюсов (pole placement), являющаяся ключевой в современной теории управления линейными системами. Получено решение задачи стабилизации линейной системы со многими входами и выходами. На основе ленточных критериев управляемости и наблюдаемости, играющих фундаментальную роль в представлении и описании свойств линейных динамических систем, приведен аналог теоремы Ван дер Воуда для случая линейной управляемой системы с одним входом и многими выходами, дано решение задачи стабилизации при заданном характеристическом полиноме замкнутой системы, получено обобщение теоремы Ван дер Воуда для случая линейной управляемой MIMO-системы, а также описано и параметризовано множество векторов разности коэффициентов заданного и исходного характеристических полиномов, которые могут быть реализованы с помощью обратной связи по выходу. Приведены доказательства сформулированных теорем.

Ключевые слова: матричный делитель нуля, динамическая система, управляемость, наблюдаемость, стабилизация, ленточный критерий, обратная связь по выходу.

SYNTHESIS OF STABILIZING CONTROL BASED ON BAND CRITERIA

N.E. Zubov[1,2], **E.A. Mikrin**[1,2], **M.Sh. Misrikhanov**[2], **V.N. Ryabchenko**[1,2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: nezubov@bmstu.ru

[2]OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”,
Korolev, Moscow region, Russian Federation
e-mail: nezubov@bmst.ru; Nikolay.Zubov@rsce.ru

The problem of matrix spectrum control (or pole placement problem) which is the key in the modern control theory by linear systems is considered. The problem solution of linear system stabilization with Multi Input & Multi Output (MIMO) is obtained. The analogue of Van der Voud Theorem for linear controlled system with one input and many outputs based on the band criteria of controllability and observability, playing a fundamental part in presentation and description of linear dynamic systems properties is given. The problem solving of stabilization at defined characteristic

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00131).

polynomial of a closed system is given. The Van der Voud Theorem generalization for the case of linear controlled MIMO system is obtained. Also the set of vectors of coefficient difference for given and initial characteristic polynomials, which may be implemented using output feedback is described and parameterized. The proofs of the formulated theorems are presented.

Ключевые слова: matrix divide zero, dynamical system, controllability, observability, stabilization, band criteria, output feedback, pole placement.

Проблема управления спектром матрицы [1] или заданного размещения полюсов [2, 3] (pole placement [4]) является ключевой в современной теории управления линейными системами. Эта проблема возникает при решении задачи стабилизации линейной системы с многими входами и многими выходами (Multi Input Multi Output — MIMO):

$$\sigma \mathbf{x} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u}, \;\; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор входа; $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор выхода; $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ — числовые матрицы полного ранга; $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. σ — символ, обозначающий при $\sigma\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ непрерывную, а при $\sigma\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$ — дискретную систему.

Если $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_n$, т.е. $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, то управление (1) осуществляется на основе закона с обратной связью:

$$\mathbf{u} = -\boldsymbol{F}\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ — матрица регулятора по состоянию.

Если $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \;\; m < n$, тогда закон (2) заменяется на

$$\mathbf{u} = -\boldsymbol{K}\mathbf{y} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}\mathbf{x}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ — матрица регулятора по выходу.

Для линейной системы одним входом и многими выходами (Single Input Multi Output — SIMO):

$$\sigma \mathbf{x} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \;\;\; \mathbf{y} = \boldsymbol{C}\mathbf{x}, \tag{4}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u \in \mathbb{R}^1$ — скалярный вход; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ — векторный выход; $\boldsymbol{A}$ — циклическая матрица [5], законы (2) и (3) приобретают вид

$$u = -\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \;\; \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$u = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\mathbf{x}, \;\; \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m. \tag{6}$$

Введем множество собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\Lambda(\boldsymbol{A}) = \left\{\lambda_i \in \mathbb{C} : \;\; \det\left(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right) = 0, \;\; i = \overline{1,\, n}\right\}, \tag{7}$$

являющихся корнями характеристического полинома (х.п.)

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \tag{8}$$

Для полностью управляемой MIMO-системы (1) и SIMO-системы (4) следующие утверждения являются эквивалентными [4]:

а) $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A},\ \mathbf{b})$ — управляемые пары;

б) матрицы управляемости Калмана

$$\left(\ \boldsymbol{B}\ \middle|\ \boldsymbol{AB}\ \middle|\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ \middle|\ \ldots\ \middle|\ \boldsymbol{A}^{n-r}\boldsymbol{B}\ \right),\quad \left(\ \mathbf{b}\ \middle|\ \boldsymbol{A}\mathbf{b}\ \middle|\ \boldsymbol{A}^2\mathbf{b}\ \middle|\ \ldots\ \middle|\ \boldsymbol{A}^{n-r}\mathbf{b}\ \right) \tag{9}$$

имеют полный ранг по строкам;

в) обобщенные матричные пучки

$$\left(\ \lambda_i\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\ \middle|\ \boldsymbol{B}\ \right),\ \left(\ \lambda_i\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\ \middle|\ \mathbf{b}\ \right) \tag{10}$$

имеют полный ранг для всех $\lambda_i \in \Lambda(\boldsymbol{A})$;

г) собственные значения матриц $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BF}$ и $\boldsymbol{A} - \mathbf{b}\mathbf{f}^{\mathrm{T}}$ могут быть заданы произвольным образом и непрерывно зависят от матриц регуляторов $\boldsymbol{F}$ в законе (2) и $\mathbf{f}^{\mathrm{T}}$ в законе (5).

Аналогичные утверждения с учетом дуальности справедливы для наблюдаемости линейных систем (1) и (4).

Ключевым утверждением при решении задачи управления спектром матрицы [1] с помощью стабилизирующего закона (6) является теорема Ван дер Воуда.

Теорема (Van der Woude [6]). *Пусть линейная SIMO-система (4) при $\sigma\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ полностью управляемая и*

$$f(\lambda) = \lambda^n + \widehat{\alpha}_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + \widehat{\alpha}_1\,\lambda + \widehat{\alpha}_0,\quad \lambda \in \mathbb{C},\quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

— произвольный полином. Тогда для существования вектора $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ такого, что

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\right) = \lambda^n + \widehat{\alpha}_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + \widehat{\alpha}_1\,\lambda + \widehat{\alpha}_0, \tag{12}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f(\boldsymbol{A})\operatorname{Ker}\boldsymbol{C} \subset \operatorname{Lin}\left(\mathbf{b},\ \boldsymbol{A}\mathbf{b}, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-2}\mathbf{b}\right). \tag{13}$$

Здесь $\operatorname{Ker}\boldsymbol{C}$ — ядро матрицы $\boldsymbol{C}$; $\operatorname{Lin}\left(\mathbf{b},\ \boldsymbol{A}\mathbf{b}, \ldots,\ \boldsymbol{A}^{n-2}\mathbf{b}\right)$ — линейная оболочка[1], натянутая на векторы $\mathbf{b},\ \boldsymbol{A}\mathbf{b}, \ldots,\ \boldsymbol{A}^{n-2}\mathbf{b}$ [5].

В настоящей работе на основе ленточных критериев [7–10] приведен аналог теоремы Ван дер Воуда, дано решение задачи стабилизации SIMO-системы (4) при заданном х.п. замкнутой системы (12), а также описано множество векторов разности коэффициентов заданного (12) и исходного (8) х.п., которые могут быть реализованы с помощью обратной связи по выходу.

Ленточные матрицы и критерии. В работах [7–10] описаны ленточные матрицы и критерии, играющие фундаментальную роль в представлении и описании свойств линейных управляемых систем. Рассмотрим сначала линейную систему с одним входом и одним выходом (Single Input Single Output — SISO)

$$\sigma\mathbf{x} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\ \ y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \tag{14}$$

[1] Другое обозначение — Span.

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u \in \mathbb{R}^1$ — скалярный вход; $y \in \mathbb{R}^1$ — скалярный выход. В зависимости от цели исследований (14) это может быть *ленточная* (прямоугольная) *матрица управляемости*

$$\left(\frac{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{I}_n}\right) \otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \left(\frac{\boldsymbol{I}_n}{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}}\right) \otimes \left(\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{b}_L^{\perp} & -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^{\perp} & -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^{\perp} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & b_L^{\perp} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(n^2-1)\times n^2} \qquad (15)$$

или *ленточная* (прямоугольная) *матрица наблюдаемости*

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_n \end{array}\right) \otimes \mathbf{c}_R^{\perp} - \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_n & \mathbf{0} \end{array}\right) \otimes \left(\boldsymbol{A}\mathbf{c}_R^{\perp}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -\boldsymbol{A}\mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -\boldsymbol{A}\mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{c}_R^{\perp} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{A}\mathbf{c}_R^{\perp} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\boldsymbol{A}\mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{c}_R^{\perp} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n^2\times(n^2-1)}. \qquad (16)$$

Здесь и далее $\mathbf{0}$ — нулевая матрица подходящего размера[2], $\otimes$ — символ операции кронекерова произведения, символом $(\cdot)_L^{\perp}$ обозначен левый делитель нуля максимального ранга заданной матрицы (вектора), а символом $(\cdot)_R^{\perp}$ — правый делитель нуля максимального ранга заданной матрицы (вектора).

Напомним [11], что левым делителем нуля максимального ранга некоторой действительной матрицы $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ранга r называется матрица $\boldsymbol{M}_L^{\perp}$, если одновременно выполняются условия

$$\boldsymbol{M}_L^{\perp}\boldsymbol{M} = \mathbf{0}_{(n-r)\times m},\ \operatorname{rank}\boldsymbol{M}_L^{\perp} = n - r.$$

Симметрично правым делителем нуля максимального ранга некоторой действительной матрицы $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ранга r называется матрица $\boldsymbol{M}_R^{\perp}$, если одновременно выполняются следующие условия:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_R^{\perp} = \mathbf{0}_{n\times(m-r)},\ \operatorname{rank}\boldsymbol{M}_R^{\perp} = m - r.$$

В дальнейшем без ограничения общности будем полагать, что ма-

[2]В отдельных случаях ее размер будет указываться явно.

трицы $\boldsymbol{M}_L^{\perp}$ и $\boldsymbol{M}_R^{\perp}$ удовлетворяют условиям ортогональности, т.е.

$$\boldsymbol{M}_L^{\perp}\boldsymbol{M}_L^{\perp\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_{n-r}, \ \ \boldsymbol{M}_R^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_R^{\perp} = \boldsymbol{I}_{n-m}.$$

Отметим, что без уменьшения общности можно считать, что

$$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_R^{\perp}, \ \ \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_L^{\perp}. \tag{17}$$

Сосредоточим внимание на матрице (15), а получаемые результаты в силу принципа дуальности свойств управляемости и наблюдаемости линейной системы будем распространять на задачи, где фигурирует матрица (16).

Ранее авторами было установлено:

1. Для полной управляемости SISO-системы (14) необходимо и достаточно, чтобы [10]

$$\left(\left(\frac{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{I}_n}\right)\otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \left(\frac{\boldsymbol{I}_n}{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}}\right)\otimes\left(\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\right)\right)_R^{\perp} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}_1 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}, \ \ \boldsymbol{\Upsilon}_i \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

т.е. правый делитель нуля максимального ранга прямоугольной матрицы (15) был в точности вектором [10].

2. Ленточная матрица (15) *инвариантна по отношению к действию законов обратной связи* (5) и (6) [7].

3. Коэффициенты характеристического полинома (х.п.) (8) определяются формулой [10]:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \hline \alpha_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha_{n-1} \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\left(\frac{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{I}_n}\right)\otimes\mathbf{b}^{+} - \left(\frac{\boldsymbol{I}_n}{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}}\right)\otimes\left(\mathbf{b}^{+}\boldsymbol{A}\right)\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}_1 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^{+}\boldsymbol{\Upsilon}_n = 1. \tag{19}$$

4. Коэффициенты полинома

$$\beta(\lambda) = \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0 \tag{20}$$

числителя передаточной функции

$$\boldsymbol{G}(\lambda) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\left(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\mathbf{b} = \frac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)} \tag{21}$$

удовлетворяют следующему соотношению [12]:

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{n-2} \\ \hline \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{I}_n \otimes \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right) \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \otimes \left(\mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{A}\right) \right)_R^{\perp}, \ \mathbf{b}^{+} \boldsymbol{\Upsilon}_n = 1. \tag{22}$$

5. Пусть

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\right) = \lambda^n + \widehat{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \widehat{\alpha}_1 \lambda + \widehat{\alpha}_0, \ \lambda \in \mathbb{C} \tag{23}$$

— заданный х.п. замкнутой SISO-системы (14) с обратной связью. В [10] показано, что вектор $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$может быть вычислен с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} \Delta\alpha_0 \\ \hline \vdots \\ \hline \Delta\alpha_{n-2} \\ \hline \Delta\alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \widehat{\alpha}_0 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha_{n-2} - \widehat{\alpha}_{n-2} \\ \hline \alpha_{n-1} - \widehat{\alpha}_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\boldsymbol{I}_n \otimes \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\right) \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \otimes \mathbf{b}_L^{\perp} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \otimes \left(\mathbf{b}_L^{\perp} \boldsymbol{A}\right) \right)_R^{\perp}. \tag{24}$$

6. Ленточные матрицы (15), (16) играют ключевую роль в задачах обеспечения инвариантности линейной системы по отношению к действующим возмущениям [9].

Отметим, что для полностью управляемой SISO-системы матрица

$$\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}} = \left(\ \boldsymbol{\Upsilon}_1 \mid \boldsymbol{\Upsilon}_2 \mid \cdots \mid \boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} \mid \boldsymbol{\Upsilon}_n \ \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{25}$$

составленная из векторов $\boldsymbol{\Upsilon}_i$, $i = \overline{1, \ n}$, является аналогом матрицы А.Н. Крылова [10] и обратима. При этом формула (24) эквивалентна следующей формуле [13]:

$$\mathbf{f}^{\mathrm{T}} = \Delta\alpha^{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}, \tag{26}$$

где

$$\Delta\alpha^{\mathrm{T}} = \left(\ \widehat{\alpha}_0 - \alpha_0 \mid \widehat{\alpha}_1 - \alpha_1 \mid \cdots \mid \widehat{\alpha}_{n-2} - \alpha_{n-2} \mid \widehat{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1} \ \right). \tag{27}$$

В [12, 14] ленточные конструкции, приведенные ранее, обобщены на случай MIMO-системы (1).

В следующем разделе работы на основе преобразования ленточных матриц представлен аналог теоремы Ван дер Воуда и описано решение задачи стабилизации SIMO-системы (4) при заданном х.п. замкнутой системы (12).

Аналог теоремы Ван дер Воуда. Предваряя предлагаемый нами аналог теоремы Ван дер Воуда, введем необходимые в дальнейшем леммы [11].

Лемма 1. *Линейное матричное уравнение*

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3}, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_3} \tag{28}$$

разрешимо относительно матрицы $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ *тогда и только тогда, когда правый делитель нуля максимального ранга*[3] $\boldsymbol{V}_R^{\perp}$ *является и правым делителем нуля матрицы* $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{V}_R^{\perp} = \boldsymbol{0}. \tag{29}$$

Лемма 2. *Все множество решений матричного уравнения (28) при выполнении условия разрешимости* (29) *определяется формулой* (*с минимальной параметризацией*)

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{V}^{+} + \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{V}_L^{\perp}, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{V}^{+}$ *— псевдообратная матрица,* $\boldsymbol{\eta}$ *— произвольная матрица подходящего размера.*

Справедливы утверждения.

Теорема 1 (аналог теоремы Ван дер Воуда). *Для полностью управляемой линейной SIMO-системы (4) существует такой вектор* $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, *что обеспечивается полином (12), если и только если*

$$\Delta\alpha^{\mathrm{T}}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}\boldsymbol{C}_R^{\perp} = \boldsymbol{0}. \tag{31}$$

Доказательство теоремы 1. Если х.п. (12) задан, тогда вектор $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ должен удовлетворять формуле (26), т.е.

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \Delta\alpha^{\mathrm{T}}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}, \tag{32}$$

где неизвестным считается вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$. Рассматривая (32) как линейное матричное уравнение (28) согласно лемме 1 (см. (29)), получаем условие разрешимости (31), но это и есть условие теоремы Ван дер Воуда (13)[4].

Доказательство закончено.

Теорема 2. *Если для полностью управляемой линейной SIMO-системы (4) существует такой вектор* $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, *что обеспечивается полином (12), то*

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \Delta\alpha^{\mathrm{T}}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}\boldsymbol{C}^{+}. \tag{33}$$

Доказательство теоремы 2. Если условие (32) выполняется, тогда в соответствии с леммой 2 (см. (30)) получаем решение (33), где в силу полноты ранга матрицы $\boldsymbol{C}$ составляющая решения

$$\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{C}_L^{\perp} = \boldsymbol{0}.$$

[3]Если рассматривать делители нуля не максимального ранга, то условие также становится только необходимым.

[4]См. доказательство теоремы Ван дер Воуда в [1, С. 192–195].

Доказательство закончено.

Теорема 3. *Если для полностью управляемой линейной SIMO-системы (4) выполняется условие (31), то могут быть реализованы только следующие векторы разности коэффициентов х.п. (27)*:

$$\Delta\alpha^{\mathrm{T}} = \mu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}, \tag{34}$$

где $\mu^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ *— произвольный вектор.*

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим условие (31) как уравнение относительно вектора (27). В силу леммы 2, обратимости матрицы $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}$ (25) и полноты ранга матрицы $\boldsymbol{C}_R^{\perp}$ произведение матриц $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}\boldsymbol{C}_R^{\perp}$ имеет левый делитель нуля максимального ранга, равный $\boldsymbol{C}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}$. Действительно,

$$\boldsymbol{C}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}\boldsymbol{C}_R^{\perp} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_R^{\perp} = \mathbf{0}. \tag{35}$$

Очевидно, что вектор $\mu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}$ при любом $\mu^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ также является левым делителем нуля единичного ранга матрицы $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}\boldsymbol{C}_R^{\perp}$.

Доказательство закончено.

Таким образом, представлен аналог теоремы Ван дер Воуда в терминах ленточных матриц, дано решение задачи стабилизации SIMO-системы (4) при заданном х.п. замкнутой системы (12), а также описано и параметризовано множество векторов разности коэффициентов заданного (12) и исходного (8) х.п.

Обобщение теоремы Ван дер Воуда на MIMO-системы. Получим для MIMO-системы (1) формулу синтеза регулятора, аналогичную (26). Рассмотрим линейную MIMO-систему (1), где $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_n$,

$$\sigma\mathbf{x} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u}. \tag{36}$$

Введем разбиение на столбцы для матрицы входа

$$\boldsymbol{B} = \left(\ \mathbf{b}_1 \ \middle|\ \mathbf{b}_2 \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ \mathbf{b}_{r-1} \ \middle|\ \mathbf{b}_r\ \right). \tag{37}$$

Справедливо утверждение.

Лемма 3. *Для любой матрицы* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *всегда найдется последовательность векторов* $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$, ..., $\mathbf{b}_r \in \mathbb{R}^n$, *где* $r < n$, *что пара матриц*

$$\left(\boldsymbol{A} + \mathbf{b}_1\mathbf{f}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}_2\mathbf{f}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \mathbf{b}_{r-1}\mathbf{f}_{r-1}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{b}_r\right) \tag{38}$$

— управляемая. Здесь

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1^{\mathrm{T}} &= \Theta_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1^{\perp L}\left(\omega_1\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right),\\
\mathbf{f}_2^{\mathrm{T}} &= \Theta_2^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_2^{\perp L}\left(\omega_2\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right),\\
&\vdots\\
\mathbf{f}_{r-1}^{\mathrm{T}} &= \Theta_{r-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_{r-1}^{\perp L}\left(\omega_{r-1}\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right),
\end{aligned}$$

$\Theta_i^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ *— произвольный ненулевой вектор,* ω_i *— произвольный* *скаляр,* $\mathbf{b}_i^{\perp L}$ *— левый делитель нуля максимального ранга вектора* $\mathbf{b}_i$, $i = \overline{1, (r-1)}$.

Доказательство теоремы 3.2 осуществляется аналогичным образом, как это сделано в [2] для леммы 1[5].

Введем обозначение

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \mathbf{b}_1\mathbf{f}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}_2\mathbf{f}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \mathbf{b}_{r-1}\mathbf{f}_{r-1}^{\mathrm{T}}, \tag{39}$$

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \tilde{\boldsymbol{A}}\right) = \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \tilde{\alpha}_1\lambda + \tilde{\alpha}_0. \tag{40}$$

На основании справедливости леммы 3 справедлива лемма [13].

Лемма 4. *Для линейной полностью управляемой MIMO-системы (36) закон обратной связи (2), обеспечивающий замкнутой системе х.п.*

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \tilde{\boldsymbol{A}} + \mathbf{b}_r\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\right) = \lambda^n + \widehat{\alpha}_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + \widehat{\alpha}_1\,\lambda + \widehat{\alpha}_0, \tag{41}$$

определяется формулой

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{F}}}{\Delta\alpha\tilde{\mathcal{K}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}}\right), \tag{42}$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \left(\begin{array}{c} \Theta_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1^{\perp L}\left(\omega_1\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right) \\ \hline \Theta_2^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_2^{\perp L}\left(\omega_2\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right) \\ \hline \vdots \\ \hline \Theta_{r-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_{r-1}^{\perp L}\left(\omega_{r-1}\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right) \end{array}\right), \tag{43}$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\boldsymbol{\Upsilon}} = \left(\ \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_n \ \middle|\ \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{n-1} \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_2 \ \middle|\ \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_1 \ \right), \tag{44}$$

$$\left(\ \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_1^{\mathrm{T}} \ \middle|\ \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_2^{\mathrm{T}} \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{n-1}^{\mathrm{T}} \ \middle|\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \ \right)^{\mathrm{T}} =$$
$$= \left(\left(\frac{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{I}_n}\right) \otimes \mathbf{b}_r^{\perp L} - \left(\frac{\boldsymbol{I}_n}{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}}\right) \otimes \left(\mathbf{b}_r^{\perp L}\tilde{\boldsymbol{A}}\right)\right)_R^{\perp}. \tag{45}$$

При этом параметризация всех регуляторов (42), обеспечивающих характеристический полином (41), осуществляется путем замены в расчетных соотношениях вектора $\mathbf{b}_r$ *на любой другой вектор* $\mathbf{b}_i$ *из (37), варьирования элементов векторов* Θ_i^{T} *и скаляров* ω_i *в (43).*

Теперь можно сформулировать обобщение теоремы (аналога) Ван дер Воуда на случай MIMO-системы.

Теорема 4 (обобщение теоремы Ван дер Воуда). *Для полностью управляемой линейной MIMO-системы (1) существует такой вектор* $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, *что обеспечивается полином*

[5] См. также [1, С. 183–185].

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BKC}\right) = \lambda^n + \widehat{\alpha}_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + \widehat{\alpha}_1\,\lambda + \widehat{\alpha}_0, \qquad (46)$$

если и только если

$$\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{K}}}{\Delta\alpha\tilde{\mathcal{K}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}}\right)\boldsymbol{C}_R^{\perp} = \boldsymbol{0}, \qquad (47)$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \left(\frac{\dfrac{\dfrac{\Theta_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1^{\perp L}\left(\omega_1\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right)}{\Theta_2^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_2^{\perp L}\left(\omega_2\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right)}}{\vdots}}{\Theta_{r-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_{r-1}^{\perp L}\left(\omega_{r-1}\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right)}\right). \qquad (48)$$

По аналогии с теоремами 2 и 3 доказываются соответствующие теоремы, обобщающие случай MIMO-системы.

Теорема 5. *Если для полностью управляемой линейной MIMO-системы (1) существует такой вектор* $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, *что обеспечивается полином (46), то*

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{K}}}{\Delta\alpha\tilde{\mathcal{K}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}}\right)\boldsymbol{C}^{+}. \qquad (49)$$

При этом, параметризация всех регуляторов (49), обеспечивающих характеристический полином (46), осуществляется путем замены в расчетных соотношениях вектора $\mathbf{b}_r$ *на любой другой вектор* $\mathbf{b}_i$ *из (37), варьирования элементов векторов* Θ_i^{T} *и скаляров* ω_i *в (43), удовлетворяющих условию*

$$\tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{C}_R^{\perp} = \left(\frac{\dfrac{\dfrac{\Theta_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1^{\perp L}\left(\omega_1\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right)}{\Theta_2^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_2^{\perp L}\left(\omega_2\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right)}}{\vdots}}{\Theta_{r-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_{r-1}^{\perp L}\left(\omega_{r-1}\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right)}\right)\boldsymbol{C}_R^{\perp} = \boldsymbol{0}. \qquad (50)$$

Теорема 6. *Если для полностью управляемой линейной MIMO-системы (1) выполняется условие (47), то могут быть реализованы только следующие векторы разности коэффициентов х.п. (27)*:

$$\Delta\alpha^{\mathrm{T}} = \mu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\tilde{\mathcal{K}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}, \qquad (51)$$

при условии, что выполняется (50). При этом параметризация всех векторов $\Delta\alpha^{\mathrm{T}}$ *осуществляется путем замены в расчетных соотношениях вектора* $\mathbf{b}_r$ *на любой другой вектор* $\mathbf{b}_i$ *из (37), варьирования элементов векторов* μ^{T}, Θ_i^{T} *и скаляров* ω_i *в (43), удовлетворяющих условию (50).*

Таким образом, в данном разделе представлено обобщение теоремы Ван дер Воуда в терминах ленточных матриц на случай MIMO-системы (1), дано решение задачи стабилизации MIMO-системы при заданном х.п. замкнутой системы (46), а также описано и параметризовано все множество векторов разности коэффициентов (51) заданного и исходного х.п.

Пример синтеза. Рассмотрим усложненную задачу, когда задана полностью управляемая SISO-система

$$\sigma \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \ \ y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \tag{52}$$

где

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right), \ \mathbf{b} = \left(\begin{array}{c} -1 \\ \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \end{array}\right), \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \left(\begin{array}{c} 0{,}8 \\ \hline -1 \\ \hline -0{,}2 \\ \hline 1 \end{array}\right). \tag{53}$$

Характеристический полином (8) здесь равен

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 10 \tag{54}$$

и, как видно, является неустойчивым.

Предположим, что с помощью обратной связи по выходу

$$u = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \ \ \mathbf{k} \in \mathbb{R}, \tag{55}$$

требуется обеспечить устойчивый х.п. следующего вида:

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda + 10. \tag{56}$$

Вычитая соответствующие коэффициенты х.п. (56) и х.п. (54), найдем вектор разности (27)

$$\Delta\alpha^{\mathrm{T}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 20 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right).$$

Вычислим далее левый делитель нуля вектора $\mathbf{b}$ и правый делитель нуля вектора $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ из (53). Получим

$$\mathbf{b}_L^{\perp} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0{,}5 & 0{,}8333 & 0{,}1667 & -0{,}1667 \\ \hline -0{,}5 & 0{,}1667 & 0{,}8333 & 0{,}1667 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}1667 & 0{,}1667 & 0{,}8333 \end{array}\right),$$

$$\mathbf{c}_R^{\perp\mathrm{T}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0{,}6108 & 0{,}7494 & -0{,}0501 & 0{,}2506 \\ \hline 0{,}1222 & -0{,}0501 & 0{,}99 & 0{,}0501 \\ \hline -0{,}6108 & 0{,}2506 & 0{,}0501 & 0{,}7494 \end{array}\right).$$

При этом

$$\mathbf{c}^{+\mathrm{T}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0{,}2885 & -0{,}3731 & -0{,}0746 & 0{,}3731 \end{array}\right).$$

Сформируем ленточную матрицу (15), найдем ее правый делитель нуля (18), а затем построим матрицу (25). Получим

$$\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}} = \left(\; \boldsymbol{\Upsilon}_1 \;\middle|\; \boldsymbol{\Upsilon}_2 \;\middle|\; \boldsymbol{\Upsilon}_3 \;\middle|\; \boldsymbol{\Upsilon}_4 \; \right) = \\ = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0{,}2274 & 0{,}1387 & -0{,}0693 & -0{,}0693 \\ \hline -0{,}5547 & 0 & 0{,}0693 & 0{,}0693 \\ \hline 0{,}4160 & 0{,}2080 & -0{,}1387 & -0{,}0693 \\ \hline -0{,}5547 & -0{,}0693 & 0{,}1387 & 0{,}0693 \end{array} \right).$$

Согласно теореме 1 проверим условие (31):

$$\Delta\alpha^{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1} \boldsymbol{C}_R^{\perp} = \left(\; 20 \;\middle|\; 0 \;\middle|\; 6 \;\middle|\; 6 \; \right) \times \\ \times \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0{,}2274 & 0{,}1387 & -0{,}0693 & -0{,}0693 \\ \hline -0{,}5547 & 0 & 0{,}0693 & 0{,}0693 \\ \hline 0{,}4160 & 0{,}2080 & -0{,}1387 & -0{,}0693 \\ \hline -0{,}5547 & -0{,}0693 & 0{,}1387 & 0{,}0693 \end{array} \right)^{-1} \times \\ \times \left(\begin{array}{c|c|c} 0{,}6108 & 0{,}1222 & -0{,}6108 \\ \hline 0{,}7494 & -0{,}0501 & 0{,}2506 \\ \hline -0{,}0501 & 0{,}99 & 0{,}0501 \\ \hline 0{,}2506 & 0{,}0501 & 0{,}7494 \end{array} \right) \approx 0,$$

где

$$\left\| \Delta\alpha^{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1} \boldsymbol{C}_R^{\perp} \right\|_E < 7{,}27 \cdot 10^{-15},$$

а $\left\| \Delta\alpha^{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1} \boldsymbol{C}_R^{\perp} \right\|_E$ — эрмитова векторная норма.

Таким образом, задача стабилизации неустойчивой SISO-системы (52), (53) обратной связью по выходу (55) с обеспечением заданного х.п. (56), разрешима, а ее решение в соответствии с формулировкой теоремы 2 равно

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \Delta\alpha^{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1} \mathbf{c}^{+} = \left(\; 20 \;\middle|\; 0 \;\middle|\; 6 \;\middle|\; 6 \; \right) \times \\ \times \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0{,}2274 & 0{,}1387 & -0{,}0693 & -0{,}0693 \\ \hline -0{,}5547 & 0 & 0{,}0693 & 0{,}0693 \\ \hline 0{,}4160 & 0{,}2080 & -0{,}1387 & -0{,}0693 \\ \hline -0{,}5547 & -0{,}0693 & 0{,}1387 & 0{,}0693 \end{array} \right)^{-1} \times \\ \times \left(\begin{array}{c} 0{,}2985 \\ \hline -0{,}3731 \\ \hline -0{,}0746 \\ \hline 0{,}3731 \end{array} \right) = -10.$$

Можно убедится, что х.п. замкнутой системы равен

$$\det\left(\left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 2 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & \lambda-1 & -1 & 2 \\ \hline -1 & -1 & 1 & \lambda \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} -1 \\ \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \end{array}\right) \cdot 10 \cdot \left(0{,}8 \middle| -1 \middle| -0{,}2 \middle| 1\right)\right) =$$

$$= \lambda^4 + 3\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda + 10,$$

что и требовалось получить.

Наконец, используя теорему 3, осуществим параметризацию векторов разности коэффициентов х.п. (27), которые можно реализовать для SISO-системы (52), (53). Имеем

$$\Delta\alpha^{\mathrm{T}} = \mu^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathcal{K}_{\boldsymbol{\Upsilon}} = \left(\ 10\mu \mid 0 \mid 3\mu \mid 3\mu\ \right), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

или в другом виде

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right) = \lambda^4 + (3\mu - 3)\,\lambda^3 + (3\mu + 1)\,\lambda^2 + 9\lambda + 10\,(\mu - 1)\,. \tag{57}$$

Отметим, что на интервале значений $\mu = [1{,}666;\ 2{,}285]$ полином (57) является устойчивым.

Заключение. На основе разработанного авторами подхода к анализу и синтезу линейных управляемых систем с помощью ленточных матриц и критериев получен аналог теоремы Ван дер Воуда для случая линейной управляемой SIMO-системы. Приведено решение задачи стабилизации при заданном характеристическом полиноме замкнутой системы, описано и параметризовано множество векторов разности коэффициентов заданного и исходного характеристических полиномов, которые могут быть реализованы с помощью обратной связи по выходу. Получено обобщение теоремы Ван дер Воуда для случая линейной управляемой MIMO-системы, а также описано и параметризовано множество векторов разности коэффициентов заданного и исходного характеристических полиномов этой системы, которые могут быть реализованы с помощью обратной связи по выходу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов Г.А.*, *Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2005. 224 с.
2. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
3. *Дорф Р.*, *Бишоп Р.* Современные системы управления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.
4. *Kailath T.* Linear Systems. Prentice Hall. Englewood Cliffs. NJ. 1980. 832 p.
5. *Воеводин В.В.*, *Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
6. *Van der Woude J.W.* A note on pole placement by static output feedback for single input systems // Systems & Control Letters. 1988. Vol. 11. P. 285–287.

7. *Мисриханов М.Ш.* Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // АиТ. 2005. № 12. С. 93–104.
8. *Зыбин Е.Ю.*, *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Рекурсивные тесты на управляемость и наблюдаемость больших динамических систем // АиТ. 2006. № 5. С. 119–132.
9. *Мисриханов М.Ш.* Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. М.: Наука. 2007. 284 с.
10. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова // АиТ. 2007. № 12. С. 53–69.
11. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 187–242.
12. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Ленточная формула для расчета коэффициентов полинома числителя передаточной функции SISO-системы // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 6. С. 269–273.
13. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Анализ и синтез линейных динамических систем на основе ленточных формул // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 243–248.
14. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Ленточные критерии и рекурсивные тесты полной управляемости и наблюдаемости линейных алгебро-дифференциальных систем // АиТ. 2008. № 9. С. 44–61.

REFERENCES

[1] Leonov G.A., Shumafov M.M. Metody stabilizatsii lineinykh upravliaemykh system [Methods of stabilization of controllable linear systems]. St. Petersburg. Uni. St. Petersburg Publ., 2005. 224 p.

[2] Andreev Yu.N. Upravlenie konechnomernymi lineynymi ob'ektami [Control of finite-dimensional linear objects]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 424 p.

[3] Dorf R.S., Bishop R.H. Modern Control Systems. 12th ed. Prentice Hall, 2011. 1034 p. (Russ. Ed.: Dorf R., Bishop R. Sovremennye sistemy upravleniya. Per. s angl. B.I. Kopylova. Moscow, Laboratoriya Bazovykh Znaniy Publ., 2002. 832 p.).

[4] Kailath T. Linear Systems. Prentice-Hall Information and System Sciences Series. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1980. 682 p.

[5] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matritsy i vychisleniya [Matrices and computations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 320 p.

[6] Van der Woude J.W. A note on pole placement by static output feedback for single input systems. *Systems & Control Letters*, 1988, vol. 11, pp. 285–287.

[7] Misrikhanov M.Sh. Band criteria of controllability and observability of linear dynamical systems. *Avtom. Telemekh.* [Automation and Remote Control], 2005, no. 12, pp. 93–194 (in Russ.).

[8] Zybin E.Yu., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Recursive tests for controllability and observability of large dynamical systems. *Avtom. Telemekh.* [Automation and Remote Control], 2006, no. 5, pp. 119–132 (in Russ.).

[9] Misrikhanov M.Sh. Invariantnoe upravlenie mnogomernymi sistemami. Algebraicheskiy podkhod. [The invariable control for multidimensional systems. Algebraia Approach]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 284 p.

[10] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. The band formula for A.N. Krylov's problem. *Avtom. Telemekh.* [Automation and Remote Control], 2007, vol. 68, no. 12, pp. 53–69 (in Russ.).

[11] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Algebraic and Matrix Methods in the Theory of linear MIMO Systems. *Vestn. Ivanovskiy Gos Energ. Univ. (IGEU)* [Bull. Ivanovo State Power Eng. Un.], 2005, iss. 5, pp. 187–242 (in Russ.).

[12] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Band formula for calculating the coefficients of the numerator of the transfer function of SISO-system. *Vestn. Ivanovskiy Gos Energ. Univ. (IGEU)* [Bull. Ivanovo State Power Eng. Un.], 2005, iss. 6, pp. 269–273 (in Russ.).

[13] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Analysis and Synthesis of Linear Dynamic Systems Based on Banded Formulas. *Vestn. Ivanovskiy Gos Energ. Univ. (IGEU)* [Bull. Ivanovo State Power Eng. Un.], 2005, iss. 5, pp. 243–248 (in Russ.).

[14] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Band criteria and recursive tests of complete controllability and observability of linear differential-algebraic systems *Avtom. Telemekh.* [Automation and Remote Control], 2008, vol. 69, no. 9, pp. 1486–1503.

Статья поступила в редакцию 10.02.2014

Николай Евгеньевич Зубов — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области проблем управления космических аппаратов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

N.E. Zubov — Dr. Sci. (Eng.), deputy director on science of the Research and Development Center of OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, professor of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 90 publications in the field of problems of spacecraft control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Евгений Анатольевич Микрин — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, заведующий кафедрой “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области систем управления космических аппаратов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв , ул. Ленина, д. 4а.

E.A. Mikrin — Dr. Sci. (Eng.), Member of the Russian Academy of Sciences, head of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University, first deputy general designer of OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”. Author of more than 150 publications in the field of problems of spacecraft control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Мисрихан Шапиевич Мисриханов — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”. Автор более 150 научных работ в области проблем управления.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв , ул. Ленина, д. 4а.

M.Sh. Misrikhanov — Dr. Sci. (Eng.), leading researcher of the Research and Development Center of OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”. Author of more than 150 publications in the field of problems of control.
OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Владимир Николаевич Рябченко — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области проблем управления.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация,105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

V.N. Ryabchenko — Dr. Sci. (Eng.), leading researcher of the Research and Development Center of OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, professor of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of problems of control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.