

УДК 621.3 (075)

## ОТОБРАЖЕНИЕ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ МЕДЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В КОНСЕРВАТИВНЫХ ЦЕПЯХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ РЕЗОНАНСЕ

**В.Ф. Судаков**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

e-mail: vffss@inbox.ru

*Рассмотрены слабо нелинейные электрические цепи без резисторов с одним источником гармонического возбуждения. Дифференциальные уравнения цепей идентичны типовому нелинейному уравнению второго порядка. Амплитуда возбуждения и его частотная расстройка считаются малыми. Методом усреднения получены уравнения для амплитуды и фазы резонансного колебания. Для анализа плоскости амплитуда–фаза предложен простой и эффективный метод, применимый только в случае консервативных цепей. С его использованием построена амплитудно–частотная характеристика и выделены режимы одно- и бистабильности. Каждому режиму соответствует фазовый портрет: в режиме одностабильности он имеет одну особую точку, в режиме бистабильности — три. Определены координаты особых точек, характер их устойчивости, фазовые траектории в их окрестности. В режиме бистабильности качественно построен полный фазовый портрет, позволяющий представить переходные процессы при различных начальных условиях.*

**Ключевые слова:** нелинейный резонанс, бистабильность, фазовая плоскость, фазовый портрет, особые точки на фазовой плоскости.

## DISPLAY ON THE PHASE PLANE OF THE SLOW PROCESSES IN CONSERVATIVE CHAINS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM AT NONLINEAR RESONANCE

**V.F. Soudakov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

e-mail: vffss@inbox.ru

*The weakly nonlinear electric chains without resistors with a single source of harmonic excitation are discussed. Differential equations of the chains are identical to the typical nonlinear equation of second order. The amplitude of the excitation and its frequency detuning are small. The equations for the amplitude and phase of resonant oscillation are obtained by the method of averaging. A simple and effective method (applicable only in the case of conservative chains) is proposed for the analysis of amplitude–phase plane. Using it amplitude–frequency characteristic is presented and modes of one- and bistability are selected. The phase portrait corresponds to each mode: in the mode of one-stability it has one particular point, in the mode of bistability — three points. The coordinates of special points, the nature of their stability and phase trajectory in their surroundings are determined. In the mode of bistability the full phase portrait is built qualitatively and it enables to present transient processes at various initial conditions.*

**Keywords:** nonlinear resonance, bistability, phase plane, phase portrait, special point on the phase plane.

Консервативные системы специфичны в том отношении, что не предполагают наличия диссипативных сил (не имеют энергетических потерь) и могут испытывать только воздействия потенциального типа (к тому же не зависящие явно от времени). Область приложения теории точно консервативных (гамильтоновых) систем невелика: движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях, движение небесных тел (в том числе космических аппаратов). В большинстве технических приложений модель консервативных систем в чистом виде не работает хотя бы потому, что диссипация не только всегда есть, но зачастую она играет принципиальную роль. Тем не менее, консервативные системы изучаются давно и очень активно. Это объясняется рядом обстоятельств, в частности тем, что потери обычно малы и могут быть учтены в первом порядке теории возмущений. В этом случае нулевое приближение – консервативная система. Другая причина интереса к консервативным системам следующая: именно в них отчетливо проявляется ряд нелинейных эффектов, например нелинейный резонанс. При учете малых потерь резонанс этого типа тоже имеет место, но его основные особенности все-таки наследованы от нелинейного резонанса в приближенной (модельной) консервативной системе.

Нелинейный резонанс — наиболее устойчивое состояние движения в природе. Резонансные механизмы, устройства и резонансные технологии имеют КПД  $\sim 100\%$  и являются наиболее оптимальными и перспективными в физике, химии, биологии и медицине, для техники и производства. Нелинейный резонанс позволяет достаточно просто объяснить многочисленные аномальные явления: ускорение биохимических реакций, трансмутацию элементов, холодный термоядерный синтез, бесконтактную активацию жидкостей, запись информации на воде, БАД, вихревые генераторы теплоты и энергии, сверхновые торсионные передатчики информации, уникальные слабоминерализованные стерилизующие, дезинфицирующие, моющие растворы, антиоксидантные свойства и резонансную микрокластерную структуру водных растворов с временем релаксации от секунд до нескольких суток и более, и т.д.) и наметить дальнейшие пути решения назревших проблем методами нелинейной классической физики.

В электронике нелинейный резонанс может быть получен в очень простой цепи с нелинейной индуктивностью (феррорезонанс) или с нелинейной емкостью, в качестве которой часто используется барьерная емкость запертого  $p$ - $n$ -перехода полупроводникового диода. При контакте  $p$ - и  $n$ - областей часть электронов из  $n$ -области переходит в область  $p$ , а часть дырок из  $p$ -области переходит в  $n$ -область. Вблизи границы  $n$ -области образуется некомпенсированный положительный заряд неподвижных ионизированных доноров. Следовательно, в  $p$ -

области из-за ухода дырок образуется отрицательный объемный заряд неподвижных ионизированных акцепторов. Между этими зарядами возникает электрическое поле, которое препятствует дальнейшему переходу электронов в область  $p$  и дырок в область  $n$ . Разность потенциалов между областями  $p$  и  $n$ , образующаяся при контакте, равна разности работ выхода электронов. При подаче запирающего напряжения высота потенциального барьера между областями  $p$  и  $n$  возрастает. Это приводит к расширению  $p$ - $n$ -перехода, вследствие чего увеличивается положительный объемный заряд в области  $n$  и отрицательный в области  $p$ . При подаче на  $p$ - $n$ -переход прямого напряжения высота потенциального барьера уменьшается, переход сужается, заряды уменьшаются. Таким образом, изменения напряжения, приложенного к переходу, приводят к изменению объемного заряда в переходе, т.е. переход действует как емкость. Значение этой емкости зависит от напряжения на  $p$ - $n$ -переходе, т.е. она нелинейная.

В машиностроении используются упругие системы с нелинейным элементом (обобщенно говоря, “пружиной”), для которого связь между деформацией и упругой силой нелинейная, т.е. нарушается закон Гука. В таких системах также возможен нелинейный резонанс при внешнем воздействии (как полезный, так и вредный).

В технике передачи информации альтернативой цифровым методам обработки сигналов является функциональная электроника. Ее операции обычно включают свертку, корреляцию, преобразование Фурье, согласованную фильтрацию и задержку сигналов. Эти операции выполняют твердотельные сигнальные процессоры, основанные на нелинейном резонансном взаимодействии электромагнитного поля с веществом. Выходной сигнал этих устройств представляет собой спиновое, фоновое или фотонное эхо. Такие процессоры могут использоваться в качестве управляемых линий задержки и управляемых согласованных фильтров, осуществлять корреляционный и спектральный анализ сигналов.

Приведенный краткий и далеко не полный перечень применений нелинейного резонанса в консервативных системах позволяет оценить важность изучения этого явления. Более того даже простейшие нелинейные системы в условиях резонанса приобретают принципиально новое качество — в них возможна хаотическая динамика. Это, например, путь получения шумоподобных (т.е. сверхзащищенных) сигналов или систем с непредсказуемым (так называемым хаотическим) поведением.

В настоящей работе акцент сделан на консервативной электрической цепи. Ясно, что это только вопрос выбора технической модели. Существо же дела в используемой математической модели, общей для любых систем упомянутого типа.

Явления, возникающие в нелинейных электрических цепях при гармоническом воздействии, имеют большое прикладное и теоретическое значение. Поэтому им уделялось пристальное внимание [1, 2]. В таких цепях не всегда возникает резонанс, но если он есть, то его свойства отличаются от свойств резонанса в линейной цепи. При нелинейном резонансе колебания на всех частотах внутри резонансной области имеют конечные амплитуды. Нелинейный резонанс может возникать и в тех случаях, когда частота внешнего воздействия близка к кратному собственной частоты или ее дробной части. При нелинейном резонансе всегда имеет место гистерезис как в зависимости от расстройки, так и в зависимости от амплитуды воздействия. Исследованию нелинейного резонанса способствует удачный выбор применяемых для этого математических методов. Как правило, это методы усреднения [3–5]. Применительно к теории нелинейного резонанса методом усреднения всегда рассматривается наиболее общий случай нелинейной цепи с потерями. При такой общности постановки задачи и сложности исследования особенности полного фазового портрета цепи в условиях резонанса обычно не рассматриваются. Но если ограничиться только консервативными цепями, то можно построить их фазовый портрет на плоскости медленных параметров (амплитуды и фазы). Фазовый портрет позволяет представить переходные процессы для этих параметров при различных начальных условиях. В известных нам публикациях переходные процессы исследовались исключительно на аналоговых моделях или с использованием ЭВМ. Цель настоящей работы — приближенное изучение переходных процессов на фазовой плоскости аналитическими средствами.

Чтобы максимально упростить определение особых элементов фазовой плоскости, предложен метод исследования укороченных уравнений, полученных после применения метода усреднения. Этот метод основан исключительно на рассмотрении консервативных цепей и отличается простотой и эффективностью.

**Цепи и их модельные уравнения.** Рассмотрим одноконтурную цепь с гармоническим источником напряжения без резисторов. По законам Кирхгофа получим два уравнения:  $e(t) = \frac{d\psi}{dt} + u_C$ ,  $C \frac{du_C}{dt} = i(\psi)$ , где  $e(t)$  — ЭДС источника;  $\psi$  — потокосцепление катушки;  $u_C$  — напряжение на конденсаторе;  $i(\psi) = L_0^{-1}(\psi + \alpha\psi^3)$  — вебер-амперная характеристика катушки. Эти уравнения эквивалентны одному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -C^{-1}L_0^{-1}(\psi + \alpha\psi^3) + \omega E_0 \cos \omega t.$$

Рассмотрим двухузловую цепь без резисторов с гармоническим источником тока. По законам Кирхгофа получим два уравнения

$J(t) = C \frac{du_C}{dt} + i(\psi), \frac{d\psi}{dt} = u_C$ , где  $J(t)$  – ЭДС источника. Эти уравнения эквивалентны другому уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -C^{-1}L_0^{-1}(\psi^3 + \alpha\psi) + C^{-1}J(t).$$

Оба уравнения второго порядка идентичны типовому уравнению вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = \mu f(x, \omega t). \quad (1)$$

К выражению (1) приводятся уравнения и всех других консервативных слабо нелинейных цепей с гармоническим воздействием. Назовем поэтому (1) уравнением цепи.

**Укороченные уравнения.** Специфика уравнения (1) в том, что  $\mu$  – малый параметр, а нелинейная зависимость от  $x$  и зависимость от времени (внешнее воздействие) разделяются на  $f(x, \omega t) = k(x) + H \cos \omega t$ . Порождающее уравнение (при  $\mu = 0$ ) имеет собственную частоту  $\omega_1$  и описывает автономную цепь без потерь. Рассмотрим главный резонанс, когда  $\frac{\omega_1}{\omega} = (1 + \mu\eta)^{\frac{1}{2}}$ . Немалая величина  $\eta$  называется относительной расстройкой. Главный резонанс изучался многими авторами и описан во многих публикациях (например [6] и др.). Известно следующее: ни при какой расстройке  $\eta$  амплитуда вынужденных колебаний не стремится к бесконечности, что объясняется анизохронизмом этих колебаний; вынужденные колебания ангармоничны; в диапазоне расстроек  $\eta_{\text{гр}} \leq \eta \leq \infty$  возможен бистабильный режим вынужденных колебаний, т.е. существуют два типа устойчивых колебаний, а возможное колебание третьего типа неустойчиво. Далее вернемся к этому вопросу, изменив известный подход и получив тем самым возможность продвинуться в изучении главного резонанса.

Перейдем к безразмерному времени  $\varphi = \omega_1 t$  и параметру  $\nu = (1 + \mu\eta)^{-\frac{1}{2}}$  в исходном уравнении (1). Тогда

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = \mu\omega_1^{-2} f(x, \nu\varphi). \quad (2)$$

Поскольку автономная цепь (с одной степенью свободы) находится под гармоническим воздействием, результирующая цепь имеет  $3/2$  степени свободы и должна рассматриваться в трехмерном фазовом пространстве. На фазовой плоскости можно изучать только медленно меняющиеся переменные (амплитуду и фазу), уравнения для которых могут быть получены методом усреднения [4].

Представим решение уравнения (2) в виде  $x = y \cos(z + \varphi)$ , где амплитуда  $y(t)$  и фаза  $z(t)$  есть функции времени со скоростями изменения порядка  $\mu$ . Из (2) известным образом [4] получим систему уравнений первого порядка (стандартного типа, по терминологии

Н.Н. Боголюбова):

$$\frac{dy}{d\varphi} = \mu g \sin(z + \varphi), \quad \frac{dz}{d\varphi} = \mu \frac{g}{y} \cos(z + \varphi), \quad (3)$$

где  $g(y, z, \varphi) = \eta y \cos(z + \varphi) - \omega_1^{-2} f(y \cos(z + \varphi), \varphi)$ .

После усреднения по  $\varphi$  на интервале  $[0, 2\pi]$  система (3) переходит в укороченную автономную систему вида

$$\frac{dy}{d\varphi} = \mu Y(y, z), \quad \frac{dz}{d\varphi} = \mu Z(y, z) = \mu \left( \frac{\eta}{2} + \frac{\tilde{Z}}{y} \right), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} Y(y, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y, z, \varphi) \sin(z + \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2\pi\omega_1^2} \int_0^{2\pi} f(y \cos(z + \varphi), \varphi) \sin(z + \varphi) d\varphi, \\ \tilde{Z}(y, z) &= -\frac{1}{2\pi} \omega_1^{-2} \int_0^{2\pi} [k(y \cos(z + \varphi)) + H \cos \varphi] \cos(z + \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Учтем, что  $k(x) = \gamma \omega_1^2 x^3$ , где  $\gamma < 0$ . Интегралы  $Y(y, z)$  и  $\tilde{Z}(y, z)$  могут быть вычислены явно, в результате чего получим

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\mu \frac{H}{2\omega_1^2} \sin z, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \mu \left( \frac{\eta}{2} + \frac{3}{8} \gamma y^2 - \frac{H}{2\omega_1^2 y} \cos z \right). \quad (5)$$

Эти уравнения известны. Они позволяют найти как свойства стационарных колебаний при резонансе (особые точки системы (5)), так и переходные процессы при различных начальных условиях на фазовой плоскости  $(y, z)$ .

Вместо параметров  $H, \omega_1, \gamma, \eta$  удобнее использовать два обобщенных параметра

$$p = \left( -\frac{3}{4} \gamma \right)^{-1} \eta < 0 \quad \text{при} \quad \eta < 0, \quad q = \left( -\frac{3}{4} \gamma \right)^{-1} \frac{H}{\omega_1^2} > 0 \quad (6)$$

и приведенную “быструю” фазу  $s = \left( -\frac{3}{4} \gamma \right) \varphi$ .

С учетом этих обозначений укороченные уравнения (5) записываются следующим образом:

$$\frac{dy}{ds} = -\mu \frac{q}{2} \sin z, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2} \mu \left( p + y^2 - \frac{q}{y} \cos z \right). \quad (7)$$

**Параметры стационарных колебаний на фазовой плоскости  $\{y, z\}$ .** Они определяются как координаты особых точек на фазовой

плоскости  $(y, z)$ . Предлагаемый далее метод исследования, пригодный только в случае консервативных цепей, отличается от общего традиционного подхода (используемого во всех известных нам литературных источниках и изложенного, например, в [6, 7]). В указанном случае предлагаемый метод достаточно эффективен.

Заметим, что правая часть первого уравнения системы (7) обращается в нуль при  $z = 0, \pi$ . Тогда второе уравнение этой системы обращается в нуль при значениях  $y$  таких, что

$$p + y^2 - \frac{q}{y} = 0, \quad z = 0, \quad (8)$$

$$p + y^2 + \frac{q}{y} = 0, \quad z = \pi. \quad (9)$$

Изобразим графически (рис. 1) зависимости  $p(y)$ , которые следуют из (8), (9):

$$p_0(y) = -y^2 + \frac{q}{y}, \quad p_\pi(y) = -y^2 - \frac{q}{y}. \quad (10)$$

В совокупности зависимости (8), (9) неявно определяют амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) цепи. Из приведенного графика следует, что при одних значениях расстройки существует только один корень (по  $y$ ) системы (8), (9), а при других — три корня. Другими словами, в зависимости от значения частотной расстройки могут существовать одно или три стационарных колебания. Покажем аналитически, что (9) может иметь два или ни одного корня, а уравнение (8) всегда имеет один корень.

Представим (8) в виде неполного кубического уравнения

$$y^3 + py - q = 0, \quad (11)$$

корни которого определяются аналитически [8]. Их вид зависит от

$$\zeta = \frac{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}{\left(\frac{q}{2}\right)^2} = \frac{2^2}{3^3} \frac{|\eta|^3}{\left(\frac{3}{4}|\gamma|\right)\left(\frac{H}{\omega_1^2}\right)^2} > 0.$$

Пусть  $0 < \zeta < 1$ . Рассмотрим  $\sqrt{Q} = \frac{-q}{2}\sqrt{1-\zeta} < 0$ . Тогда уравнение (11) имеет только один положительный корень [8]:

$$y_{1,0} = \left(\frac{q}{2} + \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} - \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{q}{2} \left[ \left(1 - \sqrt{1-\zeta} < 0\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \sqrt{1-\zeta} < 0\right)^{\frac{1}{3}} \right]. \quad (12)$$

Пусть  $\zeta > 1$ . Рассмотрим угол  $\alpha$  в качестве более удобного параметра:

$$\cos \alpha = \frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \zeta^{-\frac{1}{2}} < 1. \quad (13)$$

Тогда уравнение (11) имеет три вещественных корня [8]:

$$\begin{aligned} y_{1,0} &= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, & y_{2,0} &= -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \\ y_{3,0} &= -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Проанализируем эти корни, используя (14). Из (13) следует, что  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  и поэтому  $0 < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6}$ , т.е.  $y_{1,0} > 0$ . С другой стороны,  $\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$  и поэтому  $y_{2,0} < 0$ ,  $-\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{6}$  и поэтому  $y_{3,0} < 0$ . Таким образом, только один корень  $y_{1,0} > 0$ , два других отрицательны и физически недопустимы.

Итак, при всех значениях параметра  $0 < \zeta < \infty$  на фазовой плоскости  $\{y, z\}$  существует единственная (физически допустимая) стационарная точка  $\{y_{1,0}, 0\}$ , но значения стационарной амплитуды  $y_{1,0}$  в зависимости от значения  $\zeta$  следует вычислять либо по (12), либо по (14).

Представим (9) в виде неполного кубического уравнения,

$$y^3 + py + q = 0, \quad (15)$$

корни которого также определяются аналитически. Их вид зависит от величины  $\zeta$  (при  $p < 0$ ). Как следует из графика (см. рис. 1), вещественные корни (15) могут существовать только при достаточно больших по модулю расстройках  $|p| \equiv |\eta|$ . Найдем граничный параметр  $\zeta_{\text{гр}}$ , соответствующий граничному значению расстройки.

По (10)  $\frac{dp_{\pi}}{dy}(y) = 2y - \frac{q}{y^2}$  и равна нулю при  $y_{\text{гр}} = \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ . Тогда

$p_{\pi}(y_{\text{гр}}) = -y_{\text{гр}}^2 - \frac{q}{y_{\text{гр}}} = -3\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ . Корни (15) могут существовать

только при  $|p| > |p_{\pi}(y_{\text{гр}})|$ . Параметр  $\zeta_{\text{гр}}$ , который соответствует точке на графике  $[y_{\text{гр}}, p_{\pi}(y_{\text{гр}})]$ , находится по формуле

$$\zeta_{\text{гр}} = \frac{\left(\frac{|p_{\pi}(y_{\text{гр}})|}{3}\right)^3}{\left(\frac{q}{2}\right)^2} = 1.$$



Соответственно, корни (15) существуют только при  $\zeta > \zeta_{гр} = 1$ . Это обстоятельство позволяет найти указанные корни аналитически.

При  $\zeta > \zeta_{гр} = 1$ ,  $p < 0$  корни уравнения (15) находятся по формулам [8]

$$y_{1,0} = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad y_{2,0} = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right), \quad (16)$$

$$y_{3,0} = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos \left( \frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right),$$

где

$$-1 < \cos \alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = -\zeta^{-\frac{1}{2}} < 0. \quad (17)$$

Из (17) следует, что  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Поэтому  $\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{2}$  и, как следует из (16),  $y_{1,\pi} > 0$ . Кроме того,  $\frac{2\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$  и  $0 < \frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$ , что позволяет легко установить из (16):  $y_{2,\pi} > 0$ ,  $y_{3,\pi} < 0$ . Отрицательная амплитуда  $y_{3,\pi} < 0$  физически недопустима.

Итак, при допустимых значениях параметра  $\zeta > 1$  на фазовой плоскости  $\{y, z\}$  всегда существуют только две стационарные точки  $\{y_{1,\pi}, \pi\}$ ,  $\{y_{2,\pi}, \pi\}$ . Значения стационарных амплитуд  $y_{1,\pi}$ ,  $y_{2,\pi}$  следует вычислять по (16).

Полученные расчетные формулы позволяют без труда выполнить расчет (например, с использованием пакета MathCAD). Сведем в таблицу значения стационарных амплитуд для различных  $\zeta$  (зависит от расстройки) при  $q = 2$ .

**Значения стационарных амплитуд**

$\zeta$	0,1	0,5	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	10	25	150	300
$y_{1,0}$	1,621	1,859	1,924	1,952	1,977	2	2,095	2,126	2,685	3,07	4,054	4,53
$y_{2,\pi}$						1	1,425	1,587	2,371	2,84	3,928	4,431
$y_{1,\pi}$						1	0,67	0,581	0,314	0,229	0,126	0,1

При  $z = 0$  с ростом модуля  $\zeta$  значение резонансной амплитуды  $y_{1,0}$  возрастает. При  $z = \pi$  с ростом  $\zeta$  (при  $\zeta > 1$ ) возрастает стационарная амплитуда  $y_{1,\pi}$  и убывает стационарная амплитуда  $y_{2,\pi}$ . Нетрудно убедиться в этих закономерностях и по графику рис. 1, если учесть, что параметр  $\zeta$  связан с параметром  $p$  следующим образом:

$|p| = 3\zeta^{\frac{1}{3}} \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ . Роль найденных корней (стационарных амплитуд резонансных колебаний) в динамике цепей различна: различен характер

устойчивости соответствующих особых точек на фазовой плоскости  $\{y, z\}$ .

**Тип устойчивости стационарных колебаний на фазовой плоскости  $\{y, z\}$ .** Обратимся к уравнениям фазовых траекторий (4). Какова бы ни была нелинейность реактивного элемента консервативной цепи (не только кубической, как в рассматриваемой задаче), уравнения (4) имеют специфическую зависимость правых частей от  $y, z$  ( $Y_0, Z_1$  — постоянные):

$$Y(y, z) = Y_0 \sin z, \quad Z(y, z) = \frac{\eta}{2} + Z_0(y) + \frac{Z_1}{y} \cos z.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1}{2}q \cos z, \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left( 2y + \frac{q}{y^2} \cos z \right), & \frac{\partial Z}{\partial z} &= \frac{1}{2}q \sin z. \end{aligned}$$

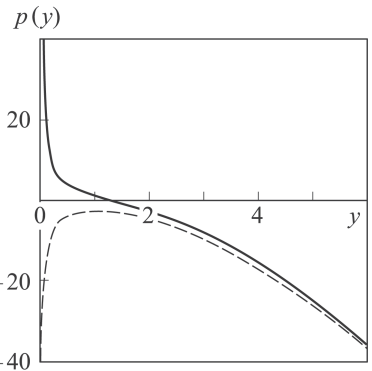
Стационарным точкам соответствует  $\sin z = 0$  ( $z = 0, \pi$ ) и, следовательно,  $\frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( 2y \pm \frac{q}{y^2} \right), \frac{\partial Y}{\partial z} = \mp \frac{1}{2}q^1$ . Характер устойчивости стационарных точек определяется коэффициентами  $\sigma = \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$  и  $\Delta = -\frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z}$  характеристического уравнения  $\lambda^2 + \delta\lambda + \Delta = 0$ . В случае кубической нелинейности, как следует из (7),

$$\Delta = \pm \frac{1}{4}q \left( 2y \pm \frac{q}{y^2} \right). \quad (18)$$

Корни зависят от знака  $\Delta$ : при  $\Delta < 0$  корни вещественны, при  $\Delta > 0$  корни чисто мнимые. Следовательно, стационарная точка, для которой  $\Delta < 0$ , есть седло, а стационарная точка, для которой  $\Delta > 0$ , есть центр. Исследуем стационарные точки  $\{y_{1,0}, 0\}, \{y_{1,\pi}, \pi\}, \{y_{1,\pi}, \pi\}$ , найденные ранее, на устойчивость, определив для них знак параметра  $\Delta$ .

Рассмотрим стационарную точку  $\{y_{1,0}, 0\}, 0 < \zeta < \infty$ . Тогда

$$\Delta = \Omega_{1,0}^2 = \frac{q}{4y_{1,0}^2} (2y_{1,0}^3 + q). \quad (19)$$



**Рис. 1.** Зависимость частотной расстройки от амплитуды колебаний в форме  $p(y)$  по формулам (10)

<sup>1</sup>Верхний знак соответствует  $z = 0$ , нижний —  $z = \pi$ .

Ранее было получено, что  $-p = y_{1,0}^2 + \frac{q}{y_{1,0}} > 0$ . Следовательно,  $\Delta = \Omega_{1,0}^2 = -p \frac{q}{4y_{1,0}^2} > 0$ , т.е. точка  $\{y_{1,0}, 0\}$  во всем диапазоне расстройек  $|\eta| \equiv \zeta$  — это центр.

**Рассмотрим стационарную точку  $\{y_{1,\pi}, \pi\}$  при  $\zeta > \zeta_{\text{гр}} = 1$ .** Тогда

$$\Delta = -\frac{q}{4y^2} (2y^3 - q). \quad (20)$$

Найдем  $2y_{1,\pi}^3 - q$  для  $y_{1,\pi} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}$ . Поскольку в силу (17) имеем

$$-q = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos \alpha, \text{ то}$$

$$2y_{1,\pi}^3 - q = 2 \left( 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} \right)^3 + 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos \alpha.$$

После некоторых преобразований получим

$$2y_{1,\pi}^3 - q = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} 12 \cos \frac{\alpha}{3} \left( \cos \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \right). \quad (21)$$

Для этой стационарной точки, как было показано при обсуждении (17),  $\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{2}$ . Отсюда  $\cos \frac{\alpha}{3} > 0$ ,  $\cos \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2} > 0$ ,  $\cos \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} < 0$ . Таким образом, из условия  $\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{2}$  существования стационарной точки  $\{y_{1,\pi}, \pi\}$  следует, что в силу (20), (21)

$$\Delta = \Omega_{1,\pi}^2 = -\frac{q}{4y_{1,\pi}^2} (2y_{1,\pi}^3 - q) > 0, \quad (22)$$

т.е. эта точка есть центр.

**Рассмотрим стационарную точку  $\{y_{2,\pi}, \pi\}$  при  $\zeta > \zeta_{\text{гр}} = 1$ .**

Здесь  $y_{2,\pi} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right)$ . Поскольку в силу (17) имеем

$$-q = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos \alpha, \text{ то}$$

$$2y_{2,\pi}^3 - q = 2 \left( -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right)^3 + 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos \alpha.$$

Отсюда после некоторых преобразований получим

$$2y_{2,\pi}^3 - q = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} 3 \cdot 4 \cos \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \times$$

$$\times \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \right] \left[ -\cos \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (23)$$

Для этой стационарной точки, как было показано при обсуждении (17), можно взять  $\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{2}$  или  $\frac{2\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$ . Следовательно,  $\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) < 0$ ,  $-\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} > 0$ ,  $\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} < 0$ . Таким образом, из условия  $\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{2}$  существования стационарной точки  $\{y_{2,\pi}, \pi\}$  следует в силу (21), (23), что

$$\Delta = -\lambda_{2,\pi}^2 = -\frac{q}{4y_{2,\pi}^2} (2y_{2,\pi}^3 - q) < 0, \quad (24)$$

т.е. эта точка — седло.

Отметим важную особенность исследования устойчивости стационарных режимов в случае резонанса для нелинейных консервативных цепей с одной степенью свободы: какой бы ни была нелинейность реактивного элемента характер устойчивости определяется знаком  $y^2 \frac{dZ_0(y)}{dy} \pm Z_1$  при стационарном значении амплитуды  $y$ . В частности, если нелинейность кубическая, для исследования устойчивости следует оценить только знак величины  $2y^3 \pm q$  (при стационарном значении амплитуды). Фактически ранее это и было проделано.

**Фазовый портрет цепи на плоскости  $\{y, z\}$ .** Фазовый портрет рассматриваемых цепей на плоскости  $\{y, z\}$  можно в общих чертах описать, исходя из общих соображений [9]. Пусть параметры цепи  $\left(|p| > |p_{\text{гр}}| = 3\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$  таковы, что на плоскости  $\{y, z\}$ , могут существовать три стационарные точки. Если начальные значения амплитуды и фазы колебаний цепи совпадают с координатами стационарных точек, то эти амплитуды и фазы могли бы оставаться такими же и при  $t \rightarrow \infty$ . Реально “точные” начальные условия не существуют, неизбежны хотя бы незначительные отклонения. В результате фазовая траектория покинет сколь угодно малую окрестность неустойчивой стационарной точки, однако останется в окрестности устойчивых стационарных точек. Из общей теории следует, что любые начальные условия, отличные от координат устойчивой стационарной точки типа центр, вызовут периодические изменения как амплитуды, так и фазы стационарных колебаний в цепи. Изменения такого типа следует рассматривать как незатухающий (в цепи нет резисторов) переходный процесс. Через неустойчивую особую точку типа седла  $\{y_{2,\pi}, \pi\}$  проходят только две замкнутые фазовые траектории, сепаратрисы. Они не реализуемы, так как период движения по ним фазовой точки бесконечен. Однако две замкнутые сепаратрисы играют важную роль как границы двух областей притяжения в окрестности двух устойчивых стационарных точек. Любую область притяжения фазовая траектория не может покинуть при  $t \rightarrow \infty$ . Области притяжения каждого из цен-

тров плотно покрыты замкнутыми фазовыми траекториями. Параметры колебаний существенно различны в зависимости от того, в какую из областей притяжения попадут начальные условия.

В данной цепи возможен и другой случай, когда есть только одна стационарная точка типа центр. Ее областью притяжения является вся фазовая плоскость, т.е. при любых начальных условиях возникает периодический переходной процесс. Множество замкнутых траекторий плотно покрывает всю фазовую плоскость.

**Рассмотрим малую окрестность центра  $\{y_{1,0}, 0\}$ :**  $y = y_{1,0} + \delta y_{1,0}$ ,  $z = \delta z_{1,0}$ . Уравнения малых колебаний нетрудно получить как уравнения в вариациях:

$$\frac{d\delta y_{1,0}}{ds} = -\frac{q}{2}\delta z_{1,0}, \quad \frac{d\delta z_{1,0}}{ds} = \left(\frac{q}{2}\right)^{-1} \Omega_{1,0}^2 \delta y_{1,0}.$$

На фазовой плоскости (в малой окрестности центра) эти уравнения представляют семейство (при различных  $C_{1,0}^2$ ) фазовых траекторий в форме эллипсов

$$\frac{\delta y_{1,0}^2}{C_{1,0}^2 q \Omega_{1,0}^{-2}} + \frac{\delta z_{1,0}^2}{C_{1,0}^2 \left(\frac{q}{4}\right)^{-1}} = 1. \quad (25)$$

Отношение полуосей этих эллипсов равно

$$\sqrt{\frac{q \Omega_{1,0}^{-2}}{\left(\frac{q}{4}\right)^{-1}}} = \sqrt{\frac{4q^2}{\Omega_{1,0}^2}} = \sqrt{\frac{16q y_{1,0}^2}{2y_{1,0}^3 + q}} > 1,$$

где использовано (19). Следовательно, эллипсы растянуты в направлении оси  $y$ . Временные зависимости  $\delta y_{1,0}(t)$ ,  $\delta z_{1,0}(t)$  представляют собой гармонические колебания с частотой  $\bar{\Omega}_{1,0} = \left(-\frac{3}{4}\gamma\right) \omega_1 \Omega_{1,0}$ .

**Рассмотрим малую окрестность центра  $\{y_{1,\pi}, \pi\}$ :**  $y = y_{1,\pi} + \delta y_{1,\pi}$ ,  $z = \pi + \delta z_{1,\pi}$ . Уравнения малых колебаний также получим как уравнения в вариациях:

$$\frac{d\delta y_{1,\pi}}{ds} = \frac{q}{2}\delta z_{1,\pi}, \quad \frac{d\delta z_{1,\pi}}{ds} = -\left(\frac{q}{2}\right)^{-1} \Omega_{1,\pi}^2 \delta y_{1,\pi}.$$

В малой окрестности центра на фазовой плоскости эти уравнения представляют семейство (при различных  $C_{1,\pi}^2$ ) фазовых траекторий также в форме эллипсов:

$$\frac{\delta z_{1,\pi}^2}{C_{1,\pi}^2 \left(\frac{q}{2}\right)^{-1}} + \frac{\delta y_{1,\pi}^2}{C_{1,\pi}^2 \left(\frac{q}{2}\right) \Omega_{1,\pi}^{-2}} = 1. \quad (26)$$

Отношение полуосей этих эллипсов составляет

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{q}{2}\right) \Omega_{1,\pi}^{-2}}{\left(\frac{q}{2}\right)^{-1}}} = \sqrt{-q \frac{y_{1,\pi}^2}{2y_{1,\pi}^3 - q}} < 1,$$

где использовано (22), следовательно, эллипсы растянуты в направлении оси  $z$ . Временные зависимости  $\delta y_{1,\pi}(t)$ ,  $\delta z_{1,\pi}(t)$  представляют собой гармонические колебания с частотой  $\bar{\Omega}_{1,\pi} = \left(-\frac{3}{4}\gamma\right) \omega_1 \Omega_{1,\pi}$ .

**Рассмотрим малую окрестность седла  $\{y_{2,\pi}, \pi\}$ :**  $y = y_{2,\pi} + \delta y_{2,\pi}$ ,  $z = \pi + \delta z_{2,\pi}$ . Уравнения малых колебаний запишем как уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta y_{2,\pi}}{ds} = \frac{q}{2} \delta z_{2,\pi}, \quad \frac{d\delta z_{2,\pi}}{ds} = \left(\frac{q}{2}\right)^{-1} \lambda_{2,\pi}^2 \delta y_{2,\pi}.$$

На фазовой плоскости (в малой окрестности седла) эти уравнения представляют семейство гипербол при разных  $C_{2,\pi}^2$ :

$$\frac{\delta y_{2,\pi}^2}{C_{2,\pi}^2 \frac{q}{2}} - \frac{\delta z_{2,\pi}^2}{C_{2,\pi}^2 \left(\frac{q}{2}\right)^{-1} \lambda_{2,\pi}^2} = 1. \quad (27)$$

Асимптоты этих гипербол (сепаратриссы седла) представляют собой в малой окрестности седла прямые. Угловой коэффициент такой прямой  $\delta y_{2,\pi} = \gamma \delta z_{2,\pi}$  в квадранте  $\delta y_{2,\pi} > 0, \delta z_{2,\pi} > 0$  равен

$$\gamma = \sqrt{\frac{q/2}{\left(\frac{q}{2}\right)^{-1} \lambda_{2,\pi}^2}}.$$

Если использовать (24), то получим

$$\gamma = \sqrt{\frac{q y_{2,\pi}^2}{2 y_{2,\pi}^3 - q}} < 1. \quad (28)$$

Следовательно, гиперболы с осью в направлении оси  $y$  заключены в угле меньшем  $\pi/2$ . Изменение во времени вдоль фазовой траектории определяется аperiodическими зависимостями

$$\begin{aligned} \delta y_{2,\pi}(t) &= A_{2,\pi} e^{\lambda_{2,\pi} \left(-\frac{3}{4}\gamma\right) \omega_1 t} + B_{2,\pi} e^{-\lambda_{2,\pi} \left(-\frac{3}{4}\gamma\right) \omega_1 t}, \\ \delta z_{2,\pi}(t) &= \left(\frac{q}{2} \frac{ds}{dt}\right)^{-1} \frac{d\delta y_{2,\pi}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (29)$$

Постоянные  $A_{2,\pi}$ ,  $B_{2,\pi}$  определяются начальными условиями. В частности, можно получить закон движения по сепаратриссе и убедиться, что скорость движения по устойчивым усам сепаратриссы стре-

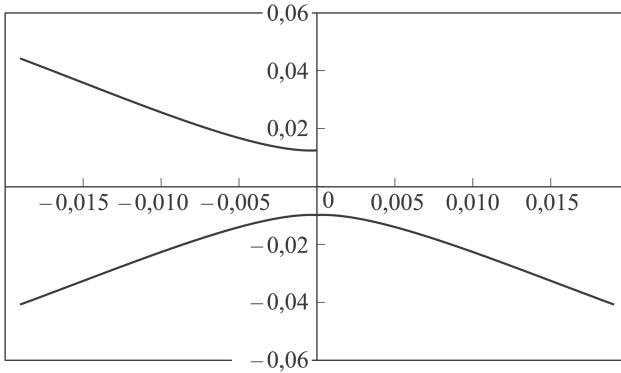


Рис. 2. Сепаратрисы седла  $\{y_2, \pi\}$  для  $\zeta = 300, q = 2$ ; полуось  $\delta z_{2, \pi} = 0, \delta y_{2, \pi} < 0$  направлена на центр  $\{y_1, \pi, \pi\}$ , полуось  $\delta z_{2, \pi} < 0, \delta y_{2, \pi} = 0$  направлена на центр  $\{y_1, 0, 0\}$

мигаться к нулю по мере приближения к седлу. На рис. 2 показаны фазовые траектории в малой окрестности седла  $\{y_2, \pi, \pi\}$ .

Использованы параметрические зависимости (9), хотя тот же результат был получен и с помощью формулы (27) для фазовой траектории. Вершины гипербол, приведенных на рис. 2, настолько близки к нулевой точке (к седлу), что дают представление о направлении сепаратрис.

Анализ положения и устойчивости стационарных точек позволяет качественно построить фазовый портрет цепи на плоскости медленных параметров  $\{y, z\}$  (рис. 3).

В силу периодической зависимости от фазы  $z$  фазовая плоскость представляет собой плоскую развертку цилиндра  $-\pi < z < \pi, y \geq 0$ . Кроме того, все фазовые траектории симметричны относительно оси  $z = 0$ , что следует из исходных дифференциальных уравнений. Эти

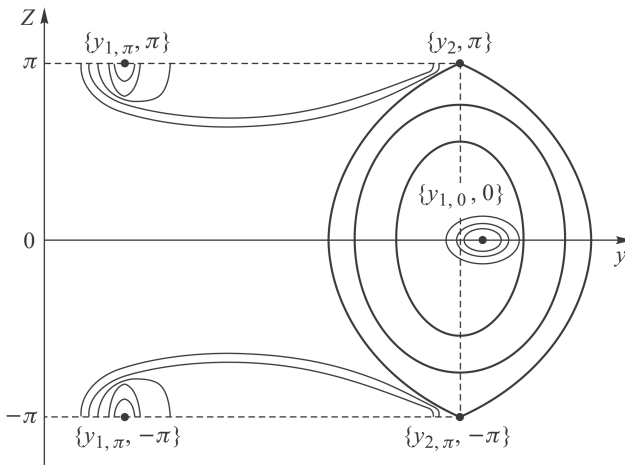


Рис. 3. Фазовый портрет цепи на плоскости  $\{y, z\}$

особенности фазовой плоскости отражены в фазовом портрете, в частности, в изображении замкнутых траекторий: они показаны разомкнутыми с краями на разрезе фазового цилиндра.

В малых окрестностях точек типа центр амплитуда и фаза совершают гармонические колебания с частотами, зависящими от положения центра и независящими от начальных условий. С удалением начальных значений от центров колебания остаются периодическими (фазовые траектории замкнуты), но их частоты уменьшаются с увеличением площади, ограниченной замкнутыми траекториями. Форма замкнутых траекторий с удалением начальных значений от центров все сильнее отличается от эллипсовидной, что говорит об ангармоничности колебаний. Из седловой точки выходят две фазовые траектории (устойчивая и неустойчивая ветви замкнутой сепаратрисы<sup>1</sup>), разделяющие фазовую плоскость на две области притяжения. Траектории, начинающиеся во внутренней области, будут всегда в ней оставаться. То же относится и к внешней области, в которой все траектории колеблются вокруг центра  $\{y_{1,\pi}, \pi\}$ . Только изменением начальных условий можно объяснить переход из области притяжения одного центра в область притяжения другого.

**Заключение.** Показано, что динамические уравнения для двух видов (а также других этого типа) консервативных цепей при одинаковом виде нелинейности идентичны, что позволило изучать одно нелинейное дифференциальное уравнение общего вида.

Применение предложенного метода исследования укороченных уравнений для амплитуды и фазы позволило на фазовой плоскости этих параметров указать координаты особых точек. Установлено, что приведенный параметр  $\zeta$  цепи имеет бифуркационное значение: когда параметры цепи таковы, что  $\zeta < 1$ , на фазовой плоскости только одно устойчивое состояние — центр; если же  $\zeta > 1$  (за счет увеличения частотной расстройки или/и амплитуды внешнего воздействия), то на фазовой плоскости три особых состояния (два центра и седло). В последнем случае амплитудные координаты особых точек чередуются: между двумя центрами находится седло. Такое расположение особых точек равносильно появлению гистерезиса.

Фазовая плоскость эквивалентна полосе  $-\pi < z < \pi$  на цилиндрической поверхности. В указанной полосе качественно построен фазовый портрет для наиболее интересного случая  $\zeta > 1$ , когда имеются три особых точки. Сепаратрисы седла отделяют области притяжения каждого из центров: переходные процессы, начавшиеся в одной из них, останутся в ней навсегда. Найдены формы фазовых траекторий (полуоси эллипсов) в окрестности центров и угловые скорости (частоты) на них; определены угловые коэффициенты сепаратрис в

---

<sup>1</sup>Сепаратрисы показаны жирными линиями.



окрестности седла. Для всех величин указана связь с исходными параметрами цепи. Характер фазового портрета позволяет сделать вывод: резонансное колебание всегда имеет амплитудно-фазовую модуляцию с непредсказуемыми (но измеримыми) параметрами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Наука, 2007. 701 с.
2. *Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С.* Теория нелинейных электрических цепей. М.: Энергоиздат, 1990. 256 с.
3. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971. 228 с.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
5. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 381 с.
6. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фужаев Н.Л.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 382 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988. 214 с.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
9. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 918 с.

## REFERENCES

- [1] Bessonov L.A. Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki. Elektricheskie tsepi [Theoretical basis of Electrical Engineering]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 701 p.
- [2] Danilov L.V., Matkhanov P.N., Filippov E.S. Teoriya nelineynykh elektricheskikh tsepey [The theory of nonlinear electrical circuits]. Moscow, Energoizdat Publ., 1990. 256 p.
- [3] Rozo M. Nelineynye kolebaniya i teoriya ustoychivosti [Nonlinear vibration and stability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 228 p.
- [4] Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of nonlinear vibration]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
- [5] Moiseev N.N. Asimptoticheskie metody nelineynoy mekhaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 381 p.
- [6] Butenin N.V., Neymark Yu.I., Fufaev N.L. Vvedenie v teoriyu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear vibration]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 382 p.
- [7] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 1. Mekhanika [Theoretical physics. Ten-volume set. Vol. 1. Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 214 p. (Eng. Ed.: Landau L.D., Lifshitz E.M. Mechanics. Volume 1 (Course of Theoretical Physics). Second Ed. Oxford, New York, Pergamon Press, 1969.)
- [8] Korn G.A., Korn T.M. Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. USA, McGraw-Hill, 1968. 1130 p. (Russ. ed.: Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Moscow, Nauka Publ., 1984. 831 p.)
- [9] Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E. Teoriya kolebaniy [Theory of oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 918 p. (Eng. ed.: Andronov A.A., Vitt A.A. and Khaykin S.E. Theory of Oscillations. Translated from the Russian by F. Immirzi. Oxford-N.Y.-Toronto, Ont., Pergamon Press, 1966).

Статья поступила в редакцию 5.11.2013

Судаков Владимир Федорович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Теоретические основы электротехники” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных работ в области теоретической электротехники, квантовой электроники, радиолокации и радионавигации.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Soudakov V.F. — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Theoretical Fundamentals of Electrical Engineering” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 140 publications in the field of theoretical electrical engineering, quantum electronics, radar and radio navigation.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.