

УДК 534.131: 629.7.058

РАСЩЕПЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА, ВЫЗВАННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕМ ФОРМЫ

С.А. Козубняк

НИЦ “Курчатовский институт”, Москва, Российская Федерация
e-mail: kozubnyak_sa@nrcki.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Методом возмущений исследованы свободные колебания цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, имеющего малые неосесимметричные отклонения формы от идеальной (малая некруглость). Разработан алгоритм расчета расщепления собственной частоты резонатора. Приведены графики зависимости расщепления частоты от геометрических параметров резонатора.

Ключевые слова: цилиндрический резонатор гироскопа, расщепление собственной частоты, метод возмущений, волновой твердотельный гироскоп.

SPLITTING OF NATURAL FREQUENCIES OF CYLINDRICAL RESONATOR GYRO DUE TO NON-IDEAL SHAPE

S.A. Kozubnyak

National Research Center “Kurchatov Institute”, Moscow, Russian Federation
e-mail: kozubnyak_sa@nrcki.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

The paper considers the research into splitting of natural frequencies of the cylindrical resonator gyro using the perturbation method. The resonator has minor nonaxisymmetric deviations from the ideal shape (minor non-circularity). A computation algorithm is designed for calculating the splitting of natural frequency of non-ideal resonator. Natural frequency splitting vs. geometric parameters diagrams are presented.

Keywords: cylindrical resonator gyro, natural frequency splitting, perturbation method, solid-state wave gyro.

Прогресс техники, в первую очередь, все большая автоматизация и интеллектуализация технических систем, их усложнение при одновременном росте требований к надежности и безопасности функционирования обуславливают постоянное увеличение насыщенности объектов техники разнообразными датчиками первичной информации. Такие датчики, являясь ключевыми элементами любых информационно-измерительных систем управления, контроля и диагностики, должны иметь все более высокие метрологические характеристики и одновременно удовлетворять комплексу сложных и, зачастую, противоречивых требований (высокая надежность, помехоустойчивость,

малая масса и габаритные размеры, малое энергопотребление, низкая стоимость и т.д.) [1].

Одним из широко применяемых и наиболее перспективных классов датчиков инерциальной информации, удовлетворяющих всему комплексу современных требований, являются волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) [2], относящиеся к классу микроэлектромеханических систем (МЭМС) [3].

Принцип действия ВТГ основан на явлении прецессии упругой стоячей волны, возбужденной в осесимметричном упругом теле (резонаторе) при его вращении вокруг оси симметрии [4]. При этом скорость прецессии пропорциональна угловой скорости вращения резонатора [4]. В реальных ВТГ резонатор, как правило, представляет собой либо стержень кольцевой формы, либо тонкостенную упругую оболочку вращения, изготовленные из плавленного кварца, сапфира или другого материала, имеющего малый коэффициент внутренних потерь при колебаниях [2, 4].

Система возбуждения–съема (фиксации) обеспечивает возбуждение и поддержание колебаний резонатора по одной из его собственных форм (стоячей волны) и определение положения пучностей стоячей волны на резонаторе [2, 4]. При вращении резонатора стоячая волна прецессирует относительно него, в силу чего положение пучностей изменяется во времени. Измеряя скорость прецессии, получаем возможность определять проекцию угловой скорости вращения объекта, на котором установлен ВТГ, на ось симметрии резонатора. При этом резонатор с системой возбуждения–съема составляет электромеханическую автоколебательную систему, обеспечивающую возбуждение колебаний и поддержание их постоянной амплитуды. С ее помощью в резонаторе устанавливают так называемую вторую форму колебаний, у которой стоячая волна имеет четыре пучности через каждые 90° .

Согласно изложенному, с точки зрения проектирования и оптимизации ВТГ важнейшее значение имеет расчет собственных частот и форм резонатора с учетом всех реальных особенностей его геометрии и материала.

К числу наиболее значимых факторов, влияющих на метрологические характеристики ВТГ, относятся отклонения параметров геометрии резонатора от идеальных (номинальных) и неоднородность материала резонатора. Это обусловлено тем, что ни одна из существующих технологий не обеспечивает возможности изготовления резонаторов с номинальными параметрами. Можно лишь добиваться, чтобы отклонения этих параметров от номинальных, а следовательно, и степень влияния указанных отклонений на рабочие характеристики ВТГ, находились в приемлемых пределах.

При этом необходимо иметь в виду, что указанные отклонения, сохраняющие осевую симметрию резонатора, вызывают лишь сдвиг спектра его частот и могут быть компенсированы сравнительно простыми средствами. Неидеальности параметров геометрии и/или материала резонатора, приводящие к нарушению осевой симметрии, влекут за собой неприемлемое снижение метрологических характеристик, называемое метрологическим отказом. Это связано с тем, что при малых возмущениях осевой симметрии возникает эффект расщепления собственных частот и форм колебаний резонатора. Эффект выражается в том, что вместо одной частоты в спектре неидеального резонатора возникают две близкие частоты и возбуждаются две близкие собственные формы, что и приводит к метрологическому отказу системы.

В настоящей работе рассмотрены алгоритм и некоторые результаты расчета расщепления частот цилиндрического резонатора ВТГ, вызванного наиболее важным на практике дефектом — малыми отклонениями геометрии оси резонатора от осевой симметрии.

Учитывая малость несовершенств, а также тот факт, что на практике колебания резонатора ВТГ являются малыми, воспользуемся аппаратом теории возмущений линейных операторов [5].

В общем случае для самосопряженных линейных операторов \mathbf{T} , \mathbf{G} задача на собственные значения имеет вид [5]

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{G}\mathbf{u}, \quad (1)$$

где \mathbf{T} , \mathbf{G} — линейные самосопряженные операторы; \mathbf{u} — собственный вектор; λ — соответствующее собственное значение частоты.

Для возмущения $\lambda^{(1)}$ собственного значения λ , вызванного малыми возмущениями операторов \mathbf{T} , \mathbf{G} , имеет место выражение [5]

$$\lambda^{(1)} = \frac{\left(\left(\mathbf{T}^{(1)} - \lambda\mathbf{G}^{(1)} \right) \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)}{\left(\mathbf{G}\mathbf{u}, \mathbf{u} \right)}, \quad (2)$$

где верхним индексом “(1)” обозначены возмущения.

В случае несамосопряженных операторов выражение для возмущения $\lambda^{(1)}$ имеет вид [6]

$$\lambda^{(1)} = \frac{\left(\left(\mathbf{T}^{(1)} - \lambda\mathbf{G}^{(1)} \right) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)}{\left(\mathbf{G}\mathbf{u}, \mathbf{v} \right)}, \quad (3)$$

где \mathbf{v} — вектор сопряженного решения.

В одномерных задачах механики система уравнений для определения собственных векторов (форм свободных колебаний) может быть записана в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} - \lambda\mathbf{B}\mathbf{y}, \quad (4)$$

где $\lambda = p^2$ — квадрат собственной круговой частоты системы; \mathbf{y} — собственный вектор системы (вектор амплитуд обобщенных перемещений и обобщенных внутренних сил в произвольном сечении системы); \mathbf{A} , \mathbf{B} — квадратные матрицы.

Для определения сопряженного решения необходимо рассмотреть сопряженную систему. Представляя (4) в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{F}\mathbf{y}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}, \quad (5)$$

получаем сопряженную систему [6]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = -\mathbf{F}^T\mathbf{v}. \quad (6)$$

Системы (5) и (6) можно представить в блочном виде [7]

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{[1]} \\ \mathbf{y}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[11]} & \mathbf{F}_{[12]} \\ \mathbf{F}_{[21]} & \mathbf{F}_{[22]} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{[1]} \\ \mathbf{y}_{[2]} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где скалярное произведение векторов $\mathbf{y}_{[1]}^T\mathbf{y}_{[2]}$ пропорционально работе,

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[11]}^T & \mathbf{F}_{[12]}^T \\ \mathbf{F}_{[21]}^T & \mathbf{F}_{[22]}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Блоки матрицы \mathbf{F} обладают следующими свойствами [7]:

$$\mathbf{F}_{[11]}^T = -\mathbf{F}_{[22]}, \quad \mathbf{F}_{[12]}^T = \mathbf{F}_{[12]}, \quad \mathbf{F}_{[21]}^T = \mathbf{F}_{[21]}.$$

В силу этого систему (8) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ -\mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[22]} & \mathbf{F}_{[12]} \\ \mathbf{F}_{[21]} & \mathbf{F}_{[11]} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ -\mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Сопоставляя (7) и (9), получаем решение сопряженной системы (9)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{y}_{[2]} \\ \mathbf{y}_{[1]} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Например, для балки векторы решений исходной и сопряженной систем имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \{ v, \vartheta, Q, M \}^T; \\ \mathbf{v} &= \{ -Q, -M, v, \vartheta \}^T, \end{aligned} \quad (11)$$

где v — перемещение; ϑ — угол поворота; Q — поперечная сила; M — изгибающий момент в произвольном сечении.

Обозначая через $\Delta\mathbf{A}$ и $\Delta\mathbf{B}$ возмущения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , получаем из (3) выражение для возмущения $\Delta\lambda$ собственного значения λ :

$$\Delta\lambda = \frac{\int_0^l (\mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda_0 \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{B} \mathbf{y}_0) dx}{\int_0^l \mathbf{v}_0^T \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 dx}, \quad (12)$$

где индексом “0” обозначены невозмущенные величины. Очевидно, что (12) дает лишь линейную часть приращения значения λ .

Возмущение круговой частоты связано с возмущением $\Delta\lambda$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \Delta p^2 = (p_0 + \Delta p)^2 - p_0^2 \approx 2p_0 \Delta p; \\ \Delta p &= \frac{\Delta\lambda}{2p_0}, \end{aligned} \quad (13)$$

где p_0 — собственная круговая частота невозмущенной системы.

Если λ_0 не является кратным корнем, то (12) дает одно определенное значение. Кратным корням соответствует не один собственный вектор, а семейство собственных векторов. Следовательно, для кратных корней λ_0 выражение (12) будет давать некоторый интервал значений. Границы этого интервала — экстремальные значения $\Delta\lambda_{\min}$, $\Delta\lambda_{\max}$ — являются двумя значениями, на которые расщепляется значение λ при возмущении коэффициентов системы уравнений (7). То, что из всего интервала необходимо выбирать именно экстремальные значения, следует из свойств отношения Рэлея [8, 9]. Очевидно, что экстремальные значения лежат на границах полученного из (12) интервала.

Собственные круговые частоты согласно (13) равны

$$\begin{aligned} p_{\min} &= p_0 + \frac{\Delta\lambda_{\min}}{2p_0}; \\ p_{\max} &= p_0 + \frac{\Delta\lambda_{\max}}{2p_0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Искомое значение расщепления круговой частоты составляет

$$p_{\max} - p_{\min} = \frac{\Delta\lambda_{\max} - \Delta\lambda_{\min}}{2p_0}. \quad (15)$$

Описанный алгоритм применим ко всем задачам о расщеплении собственной частоты, которые могут быть решены на основе обыкновенных дифференциальных уравнений (одномерные уравнения). Этот алгоритм был успешно применен в работе [10] для расчета расщеплений частоты кольцевого резонатора ВТГ. Резонатор ВТГ в виде

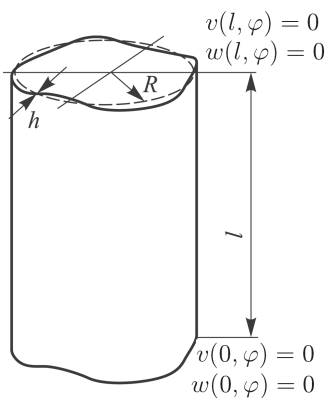


Рис. 1. Некруговой цилиндр с закреплениями Навье:

штриховой линией показана невозмущенная геометрия, а сплошной — возмущенная

полусферической оболочки может быть проанализирован только на основе дифференциальных уравнений в частных производных (двумерные уравнения). Алгоритм расчета расщепления частот оболочечного резонатора целесообразно разрабатывать так, чтобы он был применим для оболочки вращения с произвольной формой меридиана. Тестирование такого алгоритма, который в общем случае требует использования уравнений в частных производных, удобно проводить на оболочке, допускающей использование одномерных дифференциальных уравнений. Одной из целей статьи является подготовка такого теста.

Из всех неосесимметричных оболочек только для цилиндрической оболочки некруговой формы с граничными условиями Навье (рис. 1) можно исследовать расщепление частот с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. приведенный ранее алгоритм. Одномерный характер задачи позволяет получать результат с любой заданной точностью при минимальных затратах, что и придает некруговому цилиндру с граничными условиями Навье большую ценность при тестировании.

Условия Навье допускают решение в виде одной гармоники

$$\begin{aligned} u(s, \varphi) &= u_{(1)}(\varphi) \cos \frac{\pi s}{l}; \\ v(s, \varphi) &= v_{(1)}(\varphi) \sin \frac{\pi s}{l}; \\ w(s, \varphi) &= w_{(1)}(\varphi) \sin \frac{\pi s}{l}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $u(s, \varphi)$, $v(s, \varphi)$, $w(s, \varphi)$ — проекции перемещения на орты естественного трехгранника [7].

Используя известную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка [7] для определения коэффициентов $w_{(1)}$, $v_{(1)}$, $u_{(1)}$ и заменяя в ней внешние нагрузки q_1 , q_2 , q_3 динамическими нагрузками $q_{1(1)} = -u_{(1)}p^2\rho h$, $q_{2(1)} = -v_{(1)}p^2\rho h$, $q_{3(1)} = -w_{(1)}p^2\rho h$, получаем систему для расчета частот и форм колебаний неидеальной цилиндрической оболочки с граничными условиями Навье.

Система уравнений имеет стандартный вид (5)

$$\frac{dy}{d\varphi} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{y}, \quad (17)$$

где $\mathbf{y} = \{u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)}, \vartheta_{2(1)}, S_{(1)}, T_{2(1)}, Q_{2(1)}^*, M_{2(1)}\}^T$; S — сдвигающая

сила; T_2 — мембранная сила в окружном направлении; Q_2^* — приведенная поперечная сила; M_2 — интенсивность момента в окружном направлении; ϑ_2 — угол поворота нормали в окружном направлении;

$$\mathbf{A} = L \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\pi}{l} & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{Eh} & 0 & 0 & 0 \\ \mu \frac{\pi}{l} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & \frac{1-\mu^2}{Eh} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} \\ Eh \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \frac{\pi}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{l} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & \mu \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{6(1+\mu)} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \rho h L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

h, l, R — размеры оболочки (см. рис. 1); $1/R_2$ — кривизна в окружном направлении деформированной поверхности; L — параметр Ламе (масштаб). Для идеального кругового цилиндра $L = L_0 = R = \text{const}$.

Возмущение масштаба ΔL и кривизны $\Delta(1/R_2)$ возмущенной поверхности формально совпадает с аналогичными параметрами для кольца [10];

$$\begin{aligned} \Delta L &= \xi; \\ \Delta \left(\frac{1}{R_2} \right) &= -\frac{1}{R^2} \left(\xi + \frac{d^2 \xi}{d\varphi^2} \right); \\ \Delta \left(\frac{L}{R_2} \right) &= -\frac{d^2 \xi}{R d\varphi^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\xi(\varphi)$ — отклонение срединной поверхности оболочки от кругового цилиндра в радиальном направлении (не зависит от осевой координаты, так как возмущенная геометрия тоже цилиндрическая (см. рис. 1)).

Возмущение собственного значения определяется выражением, аналогичным выражению (12)

$$\Delta\lambda = \frac{\int_0^{2\pi} (\mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda_0 \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{B} \mathbf{y}_0) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \mathbf{v}_0^T \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 d\varphi}. \quad (21)$$

Невозмущенное решение λ_0, \mathbf{y}_0 было найдено путем подстановки вектора

$$\mathbf{y}_0 = \{u_{(1)k} \cos k\varphi, v_{(1)k} \sin k\varphi, w_{(1)k} \cos k\varphi, \vartheta_{2(1)k} \sin k\varphi, S_{(1)k} \sin k\varphi, T_{2(1)k} \cos k\varphi, Q_{2(1)k}^* \sin k\varphi, M_{2(1)k} \cos k\varphi\}^T$$

в систему (17), в результате чего вместо системы дифференциальных уравнений получили задачу на собственные значения для системы линейных алгебраических уравнений. Несовершенство (радиальное возмущение) задавалось в виде $\xi(\varphi) = \xi_{2k} \cos 2k\varphi$, поскольку, как было показано в работе [10] и других работах, посвященных ВТГ, именно для гармоника несовершенства с номером $2k$ расщепление частоты в первом приближении отлично от нуля. Результаты расчетов для волнового числа $k = 2$ представлены на рис. 2.

Модуль упругости $E = 7,36 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0,17$, $\rho = 2210$ кг/м³ (материал — плавленый кварц). Максимальное значение отклонения радиуса от номинального значения — 0,01 мм.

Согласно зависимостям, приведенным на рис. 2, *a, в, д*, при варьировании геометрических параметров цилиндрического резонатора относительное расщепление частоты изменяется очень незначительно. При этом абсолютное значение расщепления (рад/с) может меняться в широких пределах (см. рис. 2, *б, г, д*). Объясняется это тем, что при изменении геометрических параметров расщепление частоты, вызванное фиксированным радиальным возмущением формы оболочки, меняется примерно в той же степени, что и частота собственных колебаний оболочки с невозмущенной геометрией. В дальнейшем это наблюдение может упростить исследования в затронутой области.

Заключение. 1. На основе метода возмущений и одномерных дифференциальных уравнений для цилиндрической оболочки с граничными условиями Навье построен алгоритм расчета расщепления собственной частоты цилиндрического резонатора ВТГ.

2. Анализ влияния различных геометрических параметров на значение расщепления показал, что относительное значение расщепления очень мало от них зависит. Абсолютное значение расщепления от этих же параметров может зависеть весьма заметно.

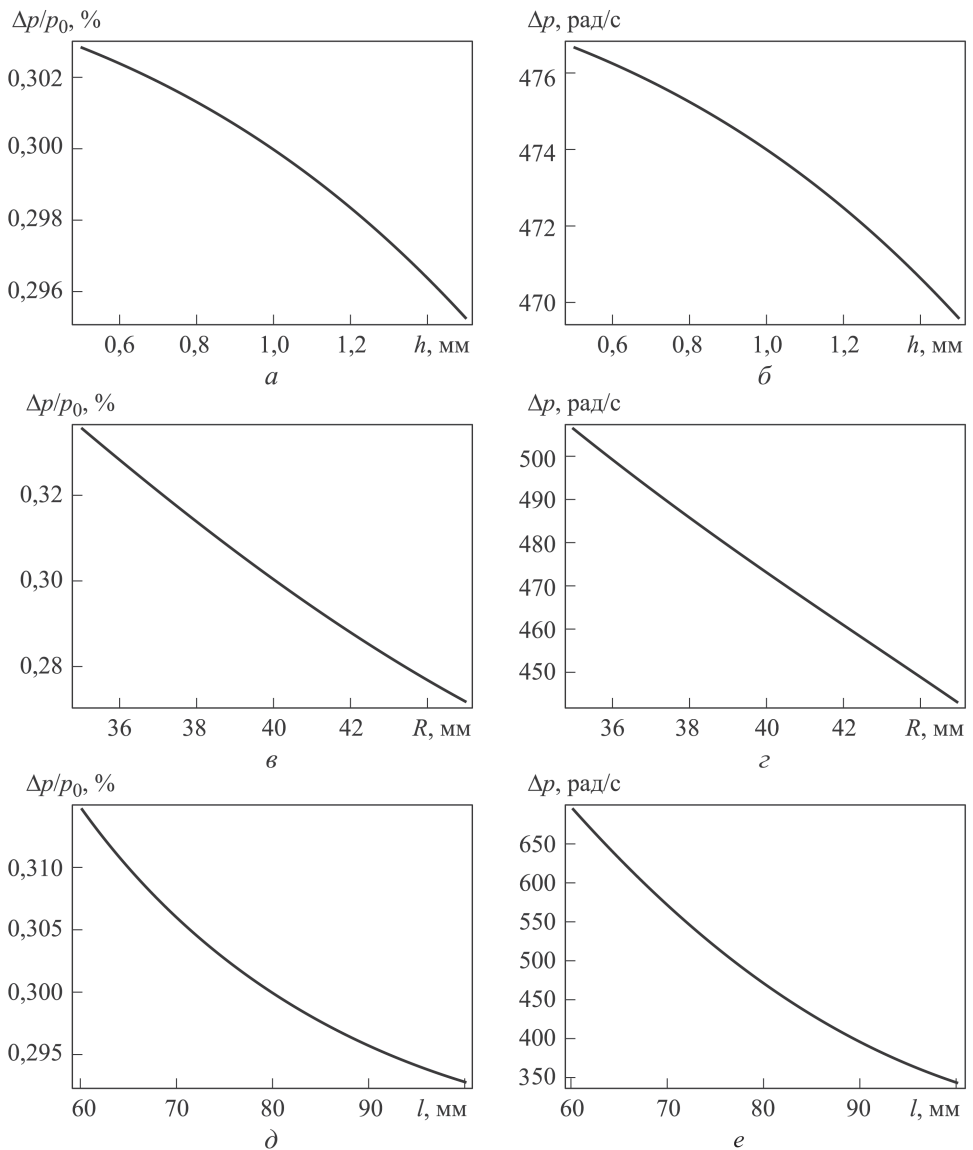


Рис. 2. Зависимость относительного (*a, в, д*) и абсолютного (*б, г, е*) расщепления частоты от толщины стенки (*a, б*) ($R = 40 \text{ мм}, l = 80 \text{ мм}$), радиуса (*в, г*) ($h = 1 \text{ мм}, l = 80 \text{ мм}$) и длины (*д, е*) ($h = 1 \text{ мм}, R = 40 \text{ мм}$) цилиндра

3. Построенное решение может использоваться в том числе и в качестве теста при отладке алгоритма расчета расщепления частот для резонаторов более сложной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуськов А.М., Коровайцева Е.А., Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Динамика кварцевого генератора в условиях внешней вибрации. М., Ижевск, 2014. 210 с.
2. Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 168 с.

3. Джексон Р.Г. Новейшие датчики. М.: Техносфера, 2007. 384 с.
4. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of revolving cylinder or belle // *Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci.* 1890. Vol. 7. P. 101–111.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
6. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992. 336 с.
7. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
8. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 504 с.
9. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.
10. Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А. Расщепление собственных частот кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа, вызванное возмущением формы // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение.* 2012. С. 176–185. URL: engjournal.ru/articles/270/270.pdf

REFERENCES

- [1] Gouskov A.M., Korovaitseva E.A., Panovko G.Ya., Shokhin A.E. *Dinamika kvarceвого генератора v usloviyah vneshnei vibratsii* [Dynamics of quartz generator under external vibrations]. Moscow–Izhevsk, 2014. 210 p.
- [2] Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhin A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Design of the hemispherical resonator gyro]. Moscow, BMSTU Publ., 1998. 168 p.
- [3] Jackson R.G. *Novel Sensors and Sensing* (Russ. ed.: Noveishie sensory. Moscow, Tekhnosphaera Publ., 2007. 384 p.).
- [4] Bryan G.H. On the beats in the vibrations of revolving cylinder or belle. *Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci.*, 1890, vol. 7, pp. 101–111.
- [5] Kato T. *Perturbation theory of linear operators. Principles of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, 1966 (Russ. ed.: Kato T. *Teoria vozmuscheniy lineinykh operatorov.* Moscow, Mir Publ., 1972. 740 p.).
- [6] Marchuk G.I. *Sopriazhionnye uravneniya i analiz slozhnykh sistem* [Adjoint equations and analysis of complex systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 336 p.
- [7] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy*. [Mechanics of thin-walled structure]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 488 p.
- [8] Collatz L. *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*. Leipzig, 1963 (Russ. ed.: Kollatz L. *Zadachi na sobstvennye znachenia (s tekhnicheskimi prilozheniyami).* Moscow, Nauka Publ., 1968. 504 p.).
- [9] Lancaster P. *Theory of Matrices*. Academic Press Inc, 1969, 326 p. (Russ. ed.: Lankaster P. *Teoria matric.* Moscow, Nauka Publ., 1973. 280 p.).
- [10] Naraikin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A. Splitting of egenfrequencies of the ring resonator of the solid-state wave gyroscope caused by form perturbation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2012, pp. 176–185. URL: engjournal.ru/articles/270/270.pdf

Статья поступила в редакцию 28.10.2014

Козубняк Светлана Аркадьевна — сотрудник Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”, старший преподаватель кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

НИЦ “Курчатовский институт”, Российская Федерация, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kozubnyak S.A. — employee of the National Research Center “Kurchatov Institute”, senior lecturer of the Applied Mechanics Department of the Bauman Moscow State Technical University.

National Research Center “Kurchatov Institute”, pl. Akademika Kurchatova 1, Moscow, 123182, Russian Federation.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Козубняк С.А. Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3. С. 39–49.

Please cite this article in English as:

Kozubnyak S.A. Splitting of natural frequencies of cylindrical resonator gyro due to non-ideal shape. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 3, pp. 39–49.