УДК 517.977.1

РАЗМЕЩЕНИЕ ПОЛЮСОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ MIMO-СИСТЕМОЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ПРОИЗВОДНЫМ СОСТОЯНИЯ*

Н.Е. Зубов[1,2], **Е.А. Микрин**[1,2], **М.Ш. Мисриханов**[2], **В.Н. Рябченко**[1,2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: nezubov@bmstu.ru; Nikolay.Zubov@rsce.ru

[2]ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва", Королёв, Московская обл., Российская Федерация

Разработан метод размещения полюсов в детерминированной линейной динамической MIMO-системе при управлении с обратной связью по производным вектора состояния. В основе метода лежит оригинальная декомпозиция исходной системы с помощью полуортогональных матричных делителей нуля. Метод универсален для непрерывного и дискретного случаев описания MIMO-системы, не имеет ограничений по размерностям векторов состояния и входа MIMO-системы, алгебраической и геометрической кратности задаваемых полюсов, предоставляет возможность аналитического синтеза регуляторов. Рассмотрено применение предложенного подхода на динамической системе четвертого порядка с двумя входами.

***Ключевые слова*:** размещение полюсов, детерминированная MIMO-система, управление по производным, декомпозиция системы.

POLE PLACEMENT IN THE CASE OF CONTROL OF MIMO-SYSTEM WITH STATE DERIVATIVE FEEDBACK

N.E. Zubov[1,2], **E.A. Mikrin**[1,2], **M.Sh. Misrikhanov**[2], **V.N. Ryabchenko**[1,2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.
e-mail: nezubov@bmstu.ru; Nikolay.Zubov@rsce.ru

[2]Rocket and Space Corporation "Energia", Moscow Region, Korolev, Russian Federation

The paper presents the developed method of pole placement in the determined linear dynamical MIMO-system controlled by state derivative feedback. The method is based on the original decomposition of the initial system with the help of matrix semiorthogonal zero divisors. The method is universal for both continuous and discrete cases of MIMO-system descriptions. It has no restrictions on both state vector dimensions and input of MIMO-system, as well as on algebraic and geometric multiplicity of the given poles. It also allows analytical synthesis of regulators. The application of the proposed approach for the fourth-order dynamic system with two inputs is considered.

***Keywords*:** pole placement, determined MIMO-system, derivative control, system decomposition.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00046).

Постановка задачи. Пусть задана детерминированная линейная динамическая MIMO-система (Multi Inputs Multi Outputs System)

$$\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t), \tag{1}$$

где $\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\} \stackrel{\Delta}{=} \dot{\mathbf{x}}(t)$ для непрерывного и $\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{x}(t+1)$ для дискретного случая описания MIMO-системы; $\mathbf{x}(t)$ — n-мерный вектор состояния; $\mathbf{u}(t)$ — r-мерный вектор управления.

В качестве закона управления рассматривается обратная связь по производным вектора состояния MIMO-системы [1–4]

$$\mathbf{u}(t) = -\boldsymbol{K}\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\}. \tag{2}$$

В результате замыкания обратной связью (2) MIMO-система (1) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\},\\ \left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t);\end{gathered} \tag{3}$$

здесь $\boldsymbol{I}_n$ — единичная матрица порядка n.

В дальнейшем считаем, что матрица в левой части уравнения (3) $\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)$ невырожденная (т.е. (3) не относится к классу дескрипторных систем [5, 6]). Тогда вместо (3) можно записать MIMO-систему

$$\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\} = \left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{x}(t). \tag{4}$$

Требуется найти такую матрицу $\boldsymbol{K}$, чтобы замкнутая MIMO-система (4) была асимптотически устойчивой, точнее, *гурвицевой* в непрерывном, и *шуровской* в дискретном случае [7], при этом ее движение обязательно бы имело заданный спектр [2–4]. Под спектром здесь (4) понимается множество собственных значений (полюсов) матрицы

$$\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)^{-1}\boldsymbol{A}, \tag{5}$$

т.е.

$$\begin{aligned}&\operatorname{eig}\left(\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\right) =\\ &\qquad = \left\{\lambda_i : \det\left(\lambda_i\boldsymbol{I}_n - \left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\right) = 0;\ i = 0, 1, \ldots, n\right\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Решение для непрерывной MIMO-системы. Рассмотрим сначала случай непрерывной MIMO-системы, когда $\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\} \stackrel{\Delta}{=} \dot{\mathbf{x}}(t)$. В предположении, что матрица $\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)$ является невырожденной, требуется найти матрицу $\boldsymbol{K}$ в (2), обеспечивающую замкнутой MIMO-системе (4), которая в данном случае принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{x}(t),$$

асимптотическую устойчивость и заданный спектр (6).

Из (4) вытекают необходимые условия решения данной задачи в непрерывном случае.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная MIMO-система* (1) *после замыкания обратной связью* (2) *имела гурвицеву матрицу* $(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{A}$ *необходима невырожденность матрицы* $\boldsymbol{A}$ *или, эквивалентно, необходимо отсутствие у этой матрицы нулевых собственных значений.*

Действительно, если матрица $\boldsymbol{A}$ вырождена, то в силу теоремы Кронеккера – Капелли [7] никакая матрица $(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})$ не может обеспечить невырожденность произведения матриц (5) (эквивалентно — отсутствие нулевых собственных значений в (5)) и, следовательно, асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывная MIMO-система* (1) *после замыкания обратной связью* (2) *имела гурвицеву матрицу* $(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{A}$ *необходима полная управляемость пары матриц*

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right) \tag{7}$$

или в более общем случае — полная управляемость пары матриц

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{AB}). \tag{8}$$

Заметим, что из полной управляемости пары (8) следует полная управляемость пары (7), но не наоборот.

Действительно, если выполняется условие полной управляемости пары матриц (8), например, на основе критерия управляемости Калмана

$$\operatorname{rank}\left[\boldsymbol{AB}\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ \ldots\ \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}\right] = n,$$

то "автоматически" при невырожденной матрице $\boldsymbol{A}$ выполняются и другие (эквивалентные) условия полной управляемости пары (7), а именно,

$$\operatorname{rank}\left[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB}\ \ldots\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right] = n,$$

$$\operatorname{rank}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{B}\ \ldots\ \boldsymbol{A}^{-n-2}\boldsymbol{B}\right] = n.$$

Эти условия можно получить различными способами, например, следующим образом. Ясно, что если обеспечено множество собственных значений (6) и матрица $\boldsymbol{A}$ невырожденная, то имеет место равенство

$$\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})\right) = \\ = \left\{\lambda_i^{-1} : \det\left(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})\right) = 0;\ i = 0, 1, \ldots, n\right\}. \tag{9}$$

Таким образом, имеет место вспомогательная задача размещения собственных значений у *инверсной* MIMO-системы

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})\,\mathbf{z}(t), \tag{10}$$

или в эквивалентном виде

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{z}(t) + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}(t). \tag{11}$$

Очевидно, что для полной управляемости инверсной MIMO-системы в форме (10) или (11) необходимо и достаточно полной управляемости пары матриц (7), или более строго — пары матриц (8).

Отметим следующее: если для MIMO-системы (1) закон управления (2) имеет вид отрицательной обратной связи по производным вектора состояния, то для инверсной системы этот закон преобразуется в положительную обратную связь по вектору состояния (см. уравнение (11)). Однако этот закон "виртуален", носит вспомогательный характер, и поэтому задача его физической реализации не ставится и, соответственно, не решается.

Итак, если найти решение задачи размещения собственных значений (9) у инверсной MIMO-системы (10), (11), то автоматически будет решена задача размещения собственных значений (6) у MIMO-системы (4) в непрерывном случае ее представления.

Осталось применить разработанный метод размещения полюсов [8–10] для собственных значений (9) и MIMO-системы с парой матриц (7).

Пусть $\boldsymbol{X}$ — некоторая произвольная матрица, $\boldsymbol{X}^{+}$ — псевдообратная матрица, $\boldsymbol{X}^{\perp}$ — полуортогональная матрица (называемая также делителем нуля), которые совместно удовлетворяют условиям регулярности и ортогональности [11]:

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{X}^{+}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+}=\boldsymbol{X}^{+},\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+}=\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{X}^{+}\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{X}^{+}\boldsymbol{X}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{X}^{\perp}\boldsymbol{X}=0,\quad \boldsymbol{X}^{\perp}\boldsymbol{X}^{\perp\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

Введем в рассмотрение следующую многоуровневую декомпозицию MIMO-системы (11):

$$\boldsymbol{A}_{*0}=\boldsymbol{A}^{-1},\quad \boldsymbol{B}_{*0}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{12}$$

— нулевой уровень декомпозиции;

$$\boldsymbol{A}_{*1}=\boldsymbol{B}_{*0}^{\perp}\boldsymbol{A}_{*0}\boldsymbol{B}_{*0}^{\perp\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}_{*1}=\boldsymbol{B}_{*0}^{\perp}\boldsymbol{A}_{*0}\boldsymbol{B}_{*0},\ldots \tag{13}$$

— первый уровень декомпозиции;

$$\boldsymbol{A}_{*k}=\boldsymbol{B}_{*k-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{*k-1}\boldsymbol{B}_{*k-1}^{\perp\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}_{*k}=\boldsymbol{B}_{*k-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{*k-1}\boldsymbol{B}_{*k-1},\ldots \tag{14}$$

— k-й (промежуточный) уровень декомпозиции;

$$\boldsymbol{A}_{*L}=\boldsymbol{B}_{*L-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{*L-1}\boldsymbol{B}_{*L-1}^{\perp\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}_{*L}=\boldsymbol{B}_{*L-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{*L-1}\boldsymbol{B}_{*L-1} \tag{15}$$

— L-й (конечный) уровень декомпозиции, где $L=\mathrm{ceil}\,(n/r)-1$, $\mathrm{ceil}\,(*)$ — операция округления числа в сторону большего значения).

Для каждого из уровней приведенной многоуровневой декомпозиции (12)–(15) рассмотрим также матрицы

$$\boldsymbol{K}_{*0}=\boldsymbol{S}_0\left(\boldsymbol{B}_{*0}^{+}-\boldsymbol{K}_{*1}\boldsymbol{B}_{*0}^{\perp\mathrm{T}}\right)-\left(\boldsymbol{B}_{*0}^{+}-\boldsymbol{K}_{*1}\boldsymbol{B}_{*0}^{\perp\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}_{*0}; \tag{16}$$

$$\boldsymbol{K}_{*1}=\boldsymbol{S}_1\left(\boldsymbol{B}_{*1}^{+}-\boldsymbol{K}_{*2}\boldsymbol{B}_{*11}^{\perp\mathrm{T}}\right)-\left(\boldsymbol{B}_{*1}^{+}-\boldsymbol{K}_{*2}\boldsymbol{B}_{*1}^{\perp\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}_{*1};\ldots \tag{17}$$

$$\boldsymbol{K}_{*k}=\boldsymbol{S}_k\left(\boldsymbol{B}_{*k}^{+}-\boldsymbol{K}_{*k-1}\boldsymbol{B}_{*k}^{\perp\mathrm{T}}\right)-\left(\boldsymbol{B}_{*k}^{+}-\boldsymbol{K}_{*k-1}\boldsymbol{B}_{*k}^{\perp\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}_{*k};\ldots \tag{18}$$

$$\boldsymbol{K}_{*L}=\boldsymbol{S}_L\boldsymbol{B}_{*L}^{+}-\boldsymbol{B}_{*L}^{+}\boldsymbol{A}_{*L}. \tag{19}$$

По аналогии с [8–10] нетрудно доказать, что в данном случае выполняется следующее тождество для собственных значений:

$$\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A}_{*0}+\boldsymbol{B}_{*0}\boldsymbol{K}_{*0}\right)=\bigcup_{i=1}^{L}\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{S}_i\right). \tag{20}$$

Таким образом, полагая $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_{*0}$ и в силу доказанных ранее положений, будем иметь тождество

$$\operatorname{eig}\left(\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BK}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\right)=\bigcup_{k=1}^{L}\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{S}_k^{-1}\right)=\left\{s_i^{-1}\right\}=\left\{\lambda_i\right\}. \tag{21}$$

Это и требовалось получить.

Решение для дискретной MIMO-системы. Ясно, что рассмотренный в предыдущем разделе подход справедлив и для случая дискретной MIMO-системы, когда $\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\}\overset{\Delta}{=}\mathbf{x}(t+1)$. При этом собственные значения (6) следует задавать таким образом, чтобы они лежали внутри единичного круга (но не в нуле), а у MIMO-системы (10) соответственно вне этого круга, т.е.

$$\operatorname{eig}\left(\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BK}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\right)=\left\{\lambda_i:0<\left|\lambda_i\right|<1\right\},$$

при этом

$$\operatorname{eig}\left(\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BK}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\right)=\left\{\lambda_i^{-1}:\left|\lambda_i^{-1}\right|>1\right\}.$$

В остальном какие-либо отличия в решении задачи отсутствуют.

Остается неисследованным случай, при котором отдельные или все собственные значения замкнутой системы принимают нулевые значения (эквивалентная трактовка связана со снижением ранга матрицы замкнутой MIMO-системы $\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BK}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$). Ясно, что напрямую воспользоваться изложенным подходом нельзя в силу сделанного постулирования обратимости матриц $\boldsymbol{A}$ и $\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BK}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$.

С другой стороны, из теории матриц хорошо известно [7], что нельзя никакой обратимой матрицей понизить ранг ее сомножителя. Например, если матрица $\boldsymbol{A}$ имеет $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m\le n$, то никакой матрицей $\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BK}\right)^{-1}$ нельзя уменьшить этот ранг. Другими словами, нельзя “приписать” матрице замкнутой системы $\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BK}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$ большее число нулевых собственных значений, нежели то, что присутствует в исходном множестве собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$.

Следовательно, для системы (3) существует лишь один вариант увеличения числа нулевых собственных значений — преобразование к дескрипторной форме

$$\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BK}\right)\Delta\left\{\mathbf{x}(t)\right\}=\boldsymbol{A}\mathbf{x}(t), \tag{22}$$

где матрица $(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})$ вырожденная, т.е. матрица $\boldsymbol{K}$ выбрана таким образом, что частично или полностью обеспечивает ненулевые (конечные) собственные значения у дескрипторной MIMO-системы (22). Данная задача является самостоятельной и выходит за рамки настоящей работы.

Пример синтеза. Рассмотрим применение предложенного подхода на практическом примере. Пусть задана модель подвижного объекта как MIMO-системы

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J_x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & J_y^{-1} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Предположим, что заданное множество собственных значений замкнутой системы имеет вид

$$\operatorname{eig}\left((\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{A}\right) = \{\lambda_{01},\ \lambda_{02}, \lambda_{11}, \lambda_{12}\} = \left\{s_{01}^{-1},\ s_{02}^{-1}, s_{11}^{-1},\ s_{12}^{-1}\right\}. \tag{25}$$

Найдем матрицу $\boldsymbol{K}$ в законе управления (2), обеспечивающего замкнутой системе множество (25) (и соответствующее множество для инверсной системы (10)).

Вычислим первоначально матрицы для модели (12). Они примут вид

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & a_{21}^{-1} & -a_{24}a_{21}^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{42}a_{43}^{-1} & 0 & 0 & a_{43}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J_x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & J_y^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}J_x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{43}^{-1}J_y^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Размерность пространства состояний инверсной системы в данном случае кратна числу входов и превосходит последние в 2 раза, поэтому для рассматриваемой MIMO-системы требуется описать лишь нулевой и первый уровни декомпозиции.

Нулевой уровень здесь имеет вид

$$\boldsymbol{A}_{*0} = \begin{bmatrix} 0 & a_{21}^{-1} & -a_{24}a_{21}^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{42}a_{43}^{-1} & 0 & 0 & a_{43}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{B}_{*0} = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}J_x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{43}^{-1}J_y^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Проводя далее соответствующие вычисления, последовательно получаем сначала полуортогональный делитель нуля

$$\boldsymbol{B}_{*0}^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

и псевдообратную матрицу

$$\boldsymbol{B}_{*0}^{+} = \begin{bmatrix} a_{21}J_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43}J_y & 0 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

затем *первый уровень* декомпозиции

$$\boldsymbol{A}_{*1} = \boldsymbol{B}_{*0}^{\perp}\boldsymbol{A}_{*0}\boldsymbol{B}_{*0}^{\perp\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{B}_{*1} = \boldsymbol{B}_{*0}^{\perp}\boldsymbol{A}_{*0}\boldsymbol{B}_{*0} = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}J_x^{-1} & 0 \\ 0 & a_{43}^{-1}J_y^{-1} \end{bmatrix}, \tag{33}$$

и, наконец, при задании

$$\boldsymbol{S}_0 = \begin{bmatrix} s_{01} & 0 \\ 0 & s_{02} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{12} \end{bmatrix}$$

получаем матрицы регуляторов

$$\boldsymbol{K}_{*1} = \begin{bmatrix} a_{21}J_x s_{11} & 0 \\ 0 & a_{43}J_y s_{12} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{*0} = \left[\begin{matrix} a_{21}J_x\left(s_{01}+s_{11}\right) & -J_x\left(a_{21}s_{01}s_{11}+1\right) \\ 0 & a_{42}J_y \end{matrix} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left. \begin{matrix} a_{24}J_x & 0 \\ a_{43}J_y\left(s_{02}+s_{12}\right) & -J_y\left(a_{43}s_{02}s_{12}+1\right) \end{matrix} \right],$$

или в другом виде

$$\boldsymbol{K}_{*1} = \begin{bmatrix} a_{21}J_x\lambda_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & a_{43}J_y\lambda_{12}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{K}_{*0} = \boldsymbol{K} = \left[\begin{array}{cc} a_{21} J_x \left(\lambda_{01}^{-1} + \lambda_{11}^{-1} \right) & -J_x \left(a_{21} \lambda_{01}^{-1} \lambda_{11}^{-1} + 1 \right) \\ 0 & a_{42} J_y \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left. \begin{array}{cc} a_{24} J_x & 0 \\ a_{43} J_y \left(\lambda_{02}^{-1} + \lambda_{12}^{-1} \right) & -J_y \left(a_{43} \lambda_{02}^{-1} \lambda_{12}^{-1} + 1 \right) \end{array} \right]. \quad (35)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в правильности найденного решения.

Как видно, данный синтез никак не отягощается различными условиями по кратности задаваемых полюсов. Так, если в формуле (35) положить все полюса равными друг другу, например, λ, то в результате получим регулятор

$$\boldsymbol{K}_{*0} = \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{2a_{21} J_x}{\lambda} & -J_x \left(\dfrac{a_{21}}{\lambda^2} + 1 \right) & a_{24} J_x & 0 \\ 0 & a_{42} J_y & \dfrac{2a_{43} J_y}{\lambda} & -J_y \left(\dfrac{a_{43}}{\lambda^2} + 1 \right) \end{bmatrix},$$

обеспечивающий заданное требование $\mathrm{eig} \left((\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BK})^{-1} \boldsymbol{A} \right) = \{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda\}$, т.е. множество собственных значений λ с кратностью 4.

Заключение. Представлен разработанный метод размещения полюсов в детерминированной линейной динамической MIMO-системе с управлением в виде обратной связи, осуществляемой по производным вектора состояния. В основе метода лежит оригинальная многоуровневая декомпозиция исходной MIMO-системы с помощью полуортогональных матричных делителей нуля. Метод универсален для непрерывного и дискретного случаев описания MIMO-системы, не имеет ограничений по размерностям векторов состояния и входа MIMO-системы, алгебраической и геометрической кратности задаваемых полюсов, предоставляет возможность аналитического синтеза регуляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ogata K*. Modern Control Engineering. Prentice-Hall. New Jersey. 2002.
2. *Abdelaziz T.H.S.*, *Valáěk M.* Eigenstructure assignment by state-derivative and partial output-derivative feedback for linear time-invariant control systems // Acta Polytechnica. 2004. No. 4. P. 54–60.
3. *Abdelaziz T.H.S.*, *Valáěk M.* A direct algorithm for pole placement by state-derivative feedback for multi input linear systems — non singular case // Kybernetika. 2005. Vol. 41. No. 5. P. 637–660.
4. *Abdelaziz T.H.S.* Parametric eigenstructure assignment using state-derivative feedback for linear systems // *J. Vibration and Contr.* 2012. No. 18. P. 1809–1827.
5. *Dai L*. Singular Control Systems. Lecture notes in control and information sciences. Spring-verlag, Berlin. 1989.
6. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Ленточные критерии и рекурсивные тесты полной управляемости и наблюдаемости линейных алгебро-дифференциальных систем // АиТ. 2008. № 9. С. 44–61.
7. *Bernstein D.S.* Matrix mathematics. Princeton Univ. Press. 2009.

8. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Размещение полюсов в больших динамических системах с многими входами и выходами // ДАН. 2011. Т. 439. № 4. С. 464–466.
9. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Размещение полюсов при управлении большой энергетической системой // АиТ. 2011. № 10. С. 129–153.
10. *Зубов Н.Е.*, *Микрин Е.А.*, *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 1. С. 92–108.
11. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 196–240.

REFERENCES

[1] Ogata K. Modern Control Engineering. Prentice-Hall. New Jersey. 2002.
[2] Abdelaziz T.H.S., Valáěk. Eigenstructure assignment by state-derivative and partial output-derivative feedback for linear time-invariant control systems. *Acta Polytechnica*, 2004, no. 4, pp. 54–60.
[3] Abdelaziz T.H.S., Valáěk. A direct algorithm for pole placement by state-derivative feedback for multi input linear systems — non singular case. *Kybernetika*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 637–660.
[4] Abdelaziz T.H.S. Parametric eigenstructure assignment using state-derivative feedback for linear systems. *J. Vibration and Contr*., 2012, no. 18, pp. 1809–1827.
[5] Dai L. Singular Control Systems. Lecture notes in control and information sciences. Springer–Verlag, Berlin, 1989.
[6] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Band criteria and recursive tests of complete controllability and observability of linear algebraic-differentiable systems. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69:9, pp. 1485–1503.
[7] Bernstein D.S. Matrix mathematics. Princeton Univ. Press, 2009.
[8] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole Placement in Large Dynamical Systems with Many Inputs and Outputs. *Doklady Mathematics,* 2011, vol. 84:1, pp. 591–593.
[9] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole placement for controlling a large scale power system. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72:10, pp. 2123–2146.
[10] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Synthesis of decoupling laws for attitude stabilization of a spacecraft. *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51:1, pp. 80–96.
[11] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Algebraic and matrix methods in the theory of linear MIMO-systems. *Vestnik IGEU*, 2005, vol. 5, pp. 196–240 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 22.12.2014

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области систем управления космических аппаратов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская обл., г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

Zubov N.E. — D.Sc. (Eng.), Deputy Director for Science and Research, Centre of Research and Development, OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Professor of Engineering and Development, Department of Automatic Control System, Bauman Moscow State Technical University, author of over 90 publications in the field of spacecraft control systems.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Lenina ul. 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation.

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, заведующий кафедрой “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области систем управления космических аппаратов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская обл., г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

Mikrin E.A. — D.Sc. (Eng.), Member of the Russian Academy of Sciences, First Deputy of General Designer of OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Head of the Department of Automatic Control System, Bauman Moscow State Technical University, author of over 150 publications in the field of spacecraft control systems.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Lenina ul. 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation.

Мисриханов Мисрихан Шапиевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра РКК “Энергия” им. С.П. Королёва, Автор более 150 научных работ в области систем управления космических аппаратов.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

Misrikhanov M.S. — D.Sc. (Eng.), Senior Staff Scientist, Center of Research and Development OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, author of over 150 research publications in the field of spacecraft control problems.
OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Lenina ul. 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области систем управления космических аппаратов.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская обл., г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Ryabchenko V.N. — D.Sc. (Eng.), Senior Staff Scientist, Center of Research and Development OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Professor of Engineering, Department of Automatic Control System, Bauman Moscow State Technical University, author of over 200 publications in the field of spacecraft control systems.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Lenina ul. 4-a, Korolev, Moskcow Region, 141070 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Размещение полюсов при управлении MIMO-системой с обратной связью по производным состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 4. С. 3–12.

Please cite this article in English as:

Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole placement in the case of control of MIMO-system with state derivative feedback. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 4, pp. 3–12.