

УДК 517.977:519.876.2

Е. М. В о р о н о в

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МНОГОПРОГРАММНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ. Ч. 2

В рамках задачи многокритериального синтеза позиционного управления рассмотрено применение синергетического метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов для получения стабилизирующих компонент используемого в процедуре синтеза многопрограммного позиционного управления нелинейной динамической системой на примере практически полезной модели движения летательного аппарата.

E-mail: emvoronov@mail.ru

Ключевые слова: многокритериальный синтез, позиционное управление, многопрограммная стабилизация, синергетический метод обеспечения асимптотических свойств траекторий, притягивающие многообразия, аналитическое конструирование агрегированных регуляторов, аэродинамический летательный аппарат.

Рассмотрим упрощенную нелинейную математическую модель продольного движения аэродинамического летательного аппарата (ЛА) с учетом динамики поступательного движения его центра масс в плоскости угла наклона траектории $\theta(t)$ и динамики совмещенного с данной плоскостью вращательного движения по углу тангажа $\vartheta(t)$, а также кинематических уравнений относительно координат — высоты $h(t)$ и горизонтальной дальности $d(t)$ (рисунок). Система уравнений, подобная приведенной в работе [1, п. 5.3.2], имеет вид

$$mV(t) = P \cos(\vartheta - \theta) - D - mg \sin \theta; \quad (1a)$$

$$mV\dot{\theta}(t) = P \sin(\vartheta - \theta) + L - mg \cos \theta; \quad (1б)$$

$$\dot{\vartheta}(t) = \omega_z; \quad (1в)$$

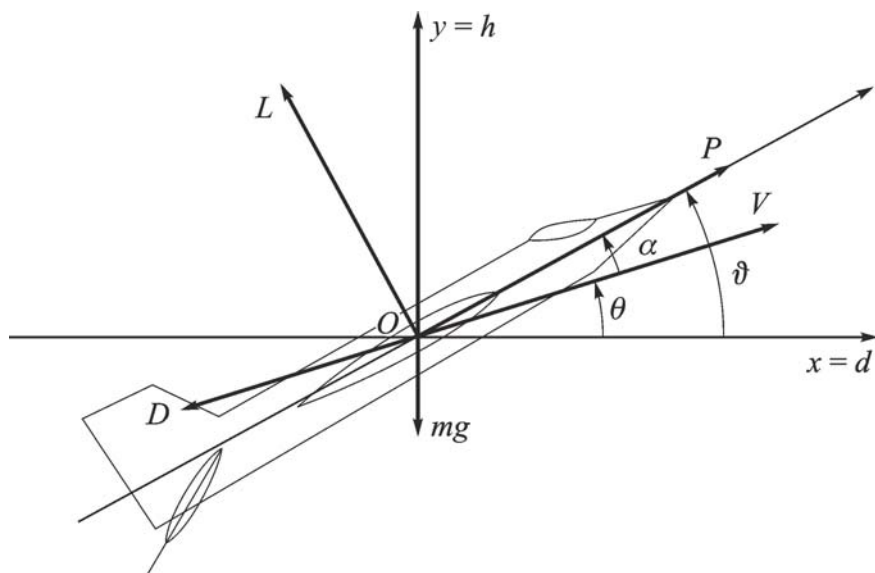
$$I_z \dot{\omega}_z(t) = M_z; \quad (1г)$$

$$\dot{h} = V \sin \theta; \quad (1д)$$

$$\dot{d}(t) = V \cos \theta; \quad (1е)$$

$$D = C_x(\alpha, M) \frac{\rho V^2}{2} s; \quad (1ж)$$

$$L = C_y(\alpha, M) \frac{\rho V^2}{2} s, \quad (1з)$$



Координаты продольного движения ЛА

где x, y — оси системы координат, связанной с центром масс ЛА (переобозначения $x = d, y = h$ вызваны спецификой обозначений в многопрограмной задаче управления); P — сила тяги; L — подъемная сила; D — сила лобового сопротивления; m — масса летательного аппарата; g — ускорение свободного падения; $\alpha = \vartheta - \theta$ — угол атаки; V — скорость ЛА; θ — угол наклона траектории; I_z — момент инерции; M_z — суммарный момент сил; ω_z — угловая скорость; C_x, C_y — аэродинамические коэффициенты; M — число Маха; ρ — плотность воздуха; s — площадь крыла ЛА.

Рассмотрим короткопериодическое движение ЛА, где задействована динамика поступательного движения центра масс ЛА и вращательного движения вокруг него. Вектор управления определяется соответственно управляющей силой P — тягой двигателя и вращающим моментом M_z — суммарным моментом сил.

В настоящей работе представлено обобщение поставленной в работе [1, п. 5.5.2] задачи обеспечения взлета с минимизацией невязок выхода на заданные значения скорости и высоты. В общем случае предполагается предварительное решение N задач оптимизации на множестве из N начальных условий на данном или расширенном векторе показателей, которые обеспечивают получение N результатов по управлениям и траекториям движения вида

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_k^T(t) &= (u_{k1}, u_{k2}) = (P_k^*(t), M_{z_k}^*(t)); \\
 \mathbf{x}_k^T(t) &= (x_{k1} \dots x_{kN}) = \\
 &= (V_k^*(t), \theta_k^*(t), \vartheta_k^*(t), \omega_{z_k}^*(t), h_k^*(t), d_k^*(t)); \\
 x_k(t_0) &= x_{k0}, \quad k = \overline{1, N}
 \end{aligned} \tag{2}$$

(при решении функции D и L принимались равными $D_k^*(t), L_k^*(t)$).

В соответствии с первой частью статьи [2] это, например, будет N решений программно-оптимальных ($\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k(t)$) многокритериальных задач управления системой (1a)–(1з), при различных начальных условиях $\mathbf{x}_k(t_0)$, $k = \overline{1, N}$.

В соответствии с теорией многопрограммного позиционного управления (МПУ) универсальная структура МПУ имеет вид [2, 3]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^N \mathbf{v}(\mathbf{y}_k(t)), \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (3)$$

где

$$\dot{\mathbf{y}}_k(t) = \mathbf{G}_x(\mathbf{y}_k(t), \mathbf{v}(\mathbf{y}_k(t))), \quad \mathbf{y}_k(t_0) = \mathbf{y}_{0k} \neq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (4)$$

— оператор системы в отклонениях относительно одной из многопрограммных траекторий $\mathbf{x}_k(t)$; $\mathbf{v}(\mathbf{y}_k(t))$ — стабилизирующая компонента МПУ, обеспечивающая устойчивость нулевого решения (4) (управление, стабилизирующее траекторию МПУ $\mathbf{x}(t)$ относительно $\mathbf{x}_k(t)$ или, другими словами, обеспечивающее асимптотические свойства заданной траектории $\mathbf{x}_k(t)$);

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k(t) \prod_{s=1, s \neq k}^N \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s(t))^2}{(\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_s(t))^2}, \quad \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k, t) = \mathbf{u}_k(t) \quad (5)$$

— многопрограммное управление без свойств стабилизации [2, 3].

Очевидно, что получение $\mathbf{v}(\mathbf{y}_k(t))$ для каждого $k = \overline{1, N}$ формирует векторную асимптотику $\mathbf{x}_k(t)$, $k = \overline{1, N}$, как притягивающего многообразия для траектории $\mathbf{x}(t)$, соответствующей МПУ (3).

В работах В.И. Зубова [4] и Н.В. Смирнова [5, 6] решена задача многопрограммной стабилизации для линейных стационарных и нестационарных систем, а также некоторых видов нелинейных систем в случае полной и неполной обратной связи на интервале $t_0 \leq t < \infty$.

Универсальная форма многопрограммного управления в виде интерполяционного полинома Лагранжа–Сильвестра имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_k(t) + C_k(t) (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t))) - \\ & - 2\mathbf{u}_k(t) \sum_{s=1, s \neq k}^N \frac{(\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_s(t)) (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t))}{(\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_s(t))^2} \times \\ & \times \prod_{i=1, i \neq k}^N \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_i(t))^2}{(\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_i(t))^2}. \quad (6) \end{aligned}$$

Стабилизирующие свойства в (6) обеспечиваются введением дополнительной обратной связи с $\mathbf{u}_0 = \mathbf{C}_k(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t))$, $k = \overline{1, N}$,

которая формирует асимптотическую устойчивость всех $\mathbf{x}_k(t)$, причем реализуемую на интервале $t_0 \leq t < \infty$.

В работах Н.В. Смирнова и И.В. Соловьевой [3, 7] данный результат обобщен в форме (3) на конечном интервале $t_0 \leq t \leq t_k$ в форме МПУ на основе метода позиционной оптимизации Р.Ф. Габасова [8], разработанного для линейных нестационарных управляемых систем. В работе [3] описана процедура использования метода для решения задачи стабилизации нулевого решения нелинейной системы в отклонениях (4) на интервале $t_0 \leq t \leq t_k$ с кусочно-линейной аппроксимацией нелинейных правых частей системы (4). Задача получения стабилизирующей компоненты (3) для одной из заданных траекторий $\mathbf{x}_k(t)$ и всего МПУ вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{y}_k(t)), \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t) \quad (7)$$

решена с линеаризацией (4) для линейных ($\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}$) и билинейных ($\dot{\mathbf{x}}(t) = (A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u})\mathbf{x}$) управляемых систем, а также управляемых систем типа Лотки–Вольтерры ($\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x} + Q(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}$, $\dim \mathbf{x} = n$, $\mathbf{P} = \text{diag}(P_1, \dots, P_k)$, $Q(\mathbf{x}) = \text{diag}(\mathbf{q}_1\mathbf{x}, \dots, \mathbf{q}_n\mathbf{x})$, $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ – строки матрицы $Q_0 = \{q_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}\}$).

В настоящей работе рассматривается процедура получения стабилизирующей компоненты $\mathbf{v}(\mathbf{y}_k(t))$ МПУ нелинейной системы (1а)–(1з) на отрезке $t_0 \leq t \leq t_k$, $k = \overline{1, N}$, без линеаризации правых частей (1) и (4) на основе синергетического подхода формирования притягивающих многообразий в форме метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [1, 2, 9].

Пусть без ограничения общности результата $N = 2$. Также отметим, что достаточно получить $\mathbf{v}(\mathbf{y}_1(t))$, так как функция $\mathbf{v}(\mathbf{y}_2(t))$, как будет показано далее, имеет вид, подобный $\mathbf{v}(\mathbf{y}_1(t))$. Функция

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) &= (V - V_k^*, Q - Q_k^*, \vartheta - \vartheta_k^*, \omega - \omega_k^*, h - h_k^*, d - d_k^*) = \\ &= (y_{k1}, \dots, y_{k6}), \quad k = \overline{1, 2}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_1^T = (P_1^*, M_{z1}^*), \quad \mathbf{u}_2^T = (P_2^*, M_{z2}^*). \quad (9)$$

Из соотношения (8) следует, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_1. \quad (10)$$

Тогда МПУ в соответствии с (3), (5) со стабилизацией относительно $\mathbf{x}_1(t)$ после замены переменной $\mathbf{x}(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_1) &= \mathbf{u}_1 \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\mathbf{y}_1}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2} + \frac{\mathbf{y}_1^2}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2} \right) + \\ &+ \mathbf{u}_2 \frac{\mathbf{y}_1^2}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2} + \mathbf{v}(\mathbf{y}_1(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку \mathbf{u} , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 в соответствии с (2), (10) являются двумерными векторами. Тогда $\mathbf{v}^T(\mathbf{y}_1(t)) = (v_1(\mathbf{y}_1(t)), v_2(\mathbf{y}_1(t)))$. Тогда

$$\begin{aligned} m\dot{y}_{11} = & \\ = & \left[P_1^* \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{l} \mathbf{y}_1 + \frac{\mathbf{y}_1^2}{l} \right) + P_2^* \frac{y_1^2}{l} + v_1(\mathbf{y}_1) \right] \cos(y_{13} - y_{12} + \alpha_1^*) - \\ & - P_1^* \cos \alpha_1^* - (D - D_1^*) - mg(\sin(y_{12} + \theta_1^*) - \sin \theta_1^*); \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} m(y_{11} + V_1^*)\dot{y}_{12} = & \\ = & \left[P_1^* \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{l} \mathbf{y}_1 + \frac{\mathbf{y}_1^2}{l} \right) + P_2^* \frac{y_1^2}{l} + v_1(\mathbf{y}_1) \right] \sin(y_{13} - y_{12} + \alpha_1^*) - \\ & - P_1^* \sin \alpha_1^* - y_{11} \dot{x}_{12} + (L - L_1^*) - mg(\cos(y_{12} + \theta_1^*) - \cos \theta_1^*); \end{aligned} \quad (12б)$$

$$\dot{y}_{13} = y_{14}; \quad (12в)$$

$$I_z \dot{y}_{14} = \left[M_{z1}^* \left(2 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{l} \mathbf{y}_1 + \frac{\mathbf{y}_1^2}{l} \right) + M_{z2}^* \frac{y_1^2}{l} \right] + v_2(\mathbf{y}_1(t)); \quad (12г)$$

$$\dot{y}_{15} = (y_{11} + V_1^*) \sin(y_{12} + \theta_1^*) - V_1^* \sin \theta_1^* \quad (12д)$$

$$\dot{y}_{16} = (y_{11} + V_1^*) \cos(y_{12} + \theta_1^*) - V_1^* \cos \theta_1^*; \quad (12е)$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{P_1^*}{mV_1^*} \sin \alpha_1^* + \frac{L_1^*}{mV_1^*} - \frac{g}{V_1^*} \cos \theta_1^*; \quad l = (x_1 - x_2)^2. \quad (12ж)$$

Для обеспечения устойчивости нулевого решения системы (12а)–(12ж) в соответствии с синергетической методикой системного синтеза [9] и применением метода АКАР [1] вводятся макропеременные

$$\psi_1 = y_{11}, \quad \psi_2 = y_{13} \quad (13)$$

и уравнения

$$T_1 \dot{\psi}_1 + \psi_1 = 0, \quad T_2 \dot{\psi}_2 + \psi_2 = 0, \quad (14)$$

где величины T_i выбираются из условия [9] $(2 \dots 5)T_i \leq t_k$.

После подстановки (13) в (14) получаем

$$\dot{y}_{11} = -\frac{1}{T_1} \psi_1 = -\frac{1}{T_1} y_{11}, \quad \dot{y}_{13} = -\frac{1}{T_2} \psi_2 = -\frac{1}{T_2} y_{13}. \quad (15)$$

Уравнения (15) с учетом (12а), (12в) и (12г) в соответствии с (3) и (4) формируют управления $v_1(\mathbf{y}_1(t))$ и $v_2(\mathbf{y}_1(t))$, приводящие (при $t \rightarrow t_k$) $y_{11}(t)$, $y_{13}(t)$ и, следовательно, $y_{14}(t)$ (как будет показано далее) на притягивающие многообразия:

$$\psi_1 = y_{11} = 0, \quad \psi_2 = y_{13} = 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad y_{14} = 0. \quad (16)$$

Действительно, подставляя (12а) в первое уравнение (15), имеем

$$v_1(\mathbf{y}_1(t)) = \left[-P_1^* \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{l} \mathbf{y}_1 + \frac{\mathbf{y}_1^2}{l} \right) - P_2^* \frac{\mathbf{y}_1^2}{l} \right] + \frac{-\frac{m}{T_1} y_{11} P_1^* \cos \alpha_1^* + (D - D_1^*) + mg(\sin(y_{12} + \theta_1^*) - \sin \theta_1^*)}{\cos(y_{13} - y_{12} + \alpha_1^*)}. \quad (17)$$

Второе уравнение (15) приводится к виду

$$\ddot{y}_{13} = -\frac{1}{T_2} \dot{y}_{13}, \quad (18)$$

но из уравнения (12в) следует замена

$$\dot{y}_{14} = -\frac{1}{T_2} y_{14}. \quad (19)$$

Как следствие из второго уравнения (15) получили уравнение (19) сходимости к нулю переменной y_{14} .

Подставляя (12г) в уравнение (19) получаем стабилизирующее управление $v_2(\mathbf{y}_1(t))$, которое при $t \rightarrow t_k$ приводит к притягивающему многообразию:

$$\psi_2 = y_{14} = 0. \quad (20)$$

С учетом уравнения (12в) и (15)

$$y_{14} = \dot{y}_{13} = -\frac{1}{T_2} y_{13} \quad (21)$$

управление $v_2(\mathbf{y}_1(t))$ также обеспечивает при $t \rightarrow t_k$ в соответствии с (21)

$$y_{13}(t_k) = 0. \quad (22)$$

Стабилизирующее управление

$$v_2(\mathbf{y}_1(t)) = -\frac{I_z}{T_2} y_{14} - \left[M_{z1}^* \left(2 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{l} \mathbf{y}_1 + \frac{\mathbf{y}_1^2}{l} \right) + M_{z2}^* \frac{\mathbf{y}_1^2}{l} \right]. \quad (23)$$

После определения $v_1(\mathbf{y}_1(t))$ и $v_2(\mathbf{y}_1(t))$, обеспечивающих при $t \rightarrow t_k$

$$y_{11} \rightarrow 0, \quad y_{13} \rightarrow 0, \quad y_{14} \rightarrow 0, \quad (24)$$

динамическая декомпозиция системы (12а)–(12ж) [9] оставляет три управления (12б), (12д) и (12е) с учетом (24). Уравнения (12д) и (12е) с учетом декомпозиции ($y_{11} = 0$) приобретают вид

$$\dot{y}_{15} = V_1^* \sin(y_{12} + \theta_1^*) - V_1^* \sin \theta_1^*; \quad (25)$$

$$\dot{y}_{16} = V_1^* \cos(y_{12} + \theta_1^*) - V_1^* \cos \theta_1^*. \quad (26)$$

Вводим макропеременные

$$\psi_3 = V_1^* \sin(y_{12} + \theta_1^*) - V_1^* \sin \theta_1^* + \alpha_1 y_{15} = \dot{y}_{15} + \alpha_1 y_{15}; \quad (27)$$

$$\psi_4 = V_1^* \cos(y_{12} + \theta_1^*) - V_1^* \cos \theta_1^* + \alpha_2 y_{16} = \dot{y}_{16} + \alpha_2 y_{16} \quad (28)$$

и уравнения

$$T_3 \dot{\psi}_3 + \psi_3 = 0, \quad T_4 \dot{\psi}_4 + \psi_4 = 0, \quad (29)$$

обеспечивающее стабилизирующий переход к притягивающим многообразиям:

$$\psi_3 = 0, \quad \psi_4 = 0. \quad (30)$$

Подставляя (27) и (28) в (29), получаем систему

$$\dot{y}_{15} + \alpha_1 \dot{y}_{15} = -\frac{1}{T_3} (\dot{y}_{15} + \alpha_1 y_{15}), \quad \dot{y}_{16} + \alpha_2 \dot{y}_{16} = -\frac{1}{T_4} (\dot{y}_{16} + \alpha_2 y_{16}). \quad (31)$$

В результате получаем, что функции

$$\psi_3 = \dot{y}_{15} + \alpha_1 y_{15}, \quad \psi_4 = \dot{y}_{16} + \alpha_2 y_{16}$$

автоматически стремятся к нулю при $t \rightarrow t_k$ при условии $(2 \dots 5) T_i \leq t_k$, $i = 3, 4$.

Таким образом, конечная декомпозиция принимает вид

$$\dot{y}_{15} + \alpha_1 y_{15} = 0, \quad \dot{y}_{16} + \alpha_2 y_{16} = 0. \quad (32)$$

Отсюда следует, что переменные y_{1i} , $i = 5, 6$, в звеньях (32) с постоянной времени $1/\alpha_j$, $j = 1, 2$, стремятся к нулю при $t \rightarrow t_k$, если $(2 \dots 5) (1/\alpha_j) \leq t_k$.

Но при $y_{15} \rightarrow 0$, $y_{16} \rightarrow 0$ из (32) следует, что $\dot{y}_{15} \rightarrow 0$, $\dot{y}_{16} \rightarrow 0$. Тогда из уравнений (25), (26) имеем

$$\begin{aligned} \dot{y}_{15} &= V_1^* \sin(y_{12} + \theta_1^*) - V_1^* \sin \theta_1^* \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_k; \\ \dot{y}_{16} &= V_1^* \cos(y_{12} + \theta_1^*) - V_1^* \cos \theta_1^* \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_k. \end{aligned} \quad (33)$$

Из (33) после преобразования разностей в произведения следует, что $\sin(y_{12}/2) \rightarrow 0$, откуда

$$\frac{y_{12}}{2} \rightarrow \pi n \text{ или } y_{12} \rightarrow 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Из механики полета известно, что угол $\theta(t)$ может изменяться лишь в пределах $|\theta| \leq \pi/2$, поэтому $|y_{12}| \leq \pi$. Тогда $n = 0$ и $y_{12} \rightarrow 0$.

Данный результат является также следствием того, что при $y_{11} \rightarrow 0$, $y_{15} \rightarrow 0$, $y_{16} \rightarrow 0$ отклонение $y_{12} \rightarrow 0$. Это следует из уравнений (1д) и (1е). Исследуем уравнение (12б) как результат динамической декомпозиции. После подстановки в (12б) управления $v_1(\mathbf{y}_1(t))$ и учета того, что $y_{11} \rightarrow 0$, $y_{13} \rightarrow 0$, $y_{14} \rightarrow 0$ (как следствие $y_{13} \rightarrow 0$), $y_{15} \rightarrow 0$, $y_{12} \rightarrow 0$, $y_{16} \rightarrow 0$ (как следствие того, что $y_{11} \rightarrow 0$, $y_{15} \rightarrow 0$, $y_{16} \rightarrow 0$),

уравнение (12б) принимает вид

$$mV_1^* \dot{y}_{12} = -\frac{D - D_1^*}{\cos \alpha_1^*} + (L - L_1^*). \quad (34)$$

Но так как разность скоростей $y_{k1} = V - V_1^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_k$ то $D = D(V)$ и $L = L(V)$ стремятся к $D^* = D(V_1^*)$, $L^* = L(V_1^*)$, поэтому в (34) $\dot{y}_{12} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_k$. Это подтверждает стабилизирующие свойства управления $\mathbf{v}^T(\mathbf{y}_1(t)) = (v_1(\mathbf{y}_1(t)), v_2(\mathbf{y}_1(t)))$ т.е., как если бы по отклонению y_{12} была бы введена макропеременная $\psi_5 = y_{12}$, для которой как следствие выполняются условия

$$\dot{\psi}_5 = -\frac{1}{T_5} \psi_5, \quad \dot{y}_{12} = -\frac{1}{T_5} y_{12}, \quad (35)$$

где при $y_{12} \rightarrow 0$, $\dot{y}_{12} \rightarrow 0$.

Таким образом, показано, что управление $\mathbf{v}^T(\mathbf{y}_1(t)) = (v_1(\mathbf{y}_1(t)), v_2(\mathbf{y}_1(t)))$, в форме (17), (23) соответственно обеспечивает устойчивость нулевого решения системы в отклонениях (4) и поэтому является стабилизирующим относительно $\mathbf{x}_1(t)$. Поэтому управление $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (7), (11) с учетом (10) ($\mathbf{y}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$) формирует траекторию $\mathbf{x}(t)$ при любых начальных условиях $\mathbf{x}(t_0)$ в окрестности заданной точки $\mathbf{x}_1(t_0)$ для которой $\mathbf{x}_1(t)$ обладает асимптотическими свойствами.

По аналогии может быть получено стабилизирующее управление $\mathbf{v}^T(\mathbf{y}_2(t)) = (v_1(\mathbf{y}_2(t)), v_2(\mathbf{y}_2(t)))$ для $N = 2$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_2 \quad (36)$$

в соответствии с заданной из (8), (9) парой $\mathbf{u}_2^T = (P_2^T, M_{22}^*)$ и $\mathbf{x}_2(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{u}_2 \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \mathbf{y}_2}{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2} + \frac{\mathbf{y}_2^2}{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2} \right) + \\ + \mathbf{u}_1 \frac{\mathbf{y}_2^2}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2} + \mathbf{v}(\mathbf{y}_2(t)). \quad (37) \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с (33), (11) система (12а)–(12ж) с учетом (37) в квадратных скобках принимает подобный вид с заменой в соответствии с (8) $k = 1$ на $k = 2$.

Выражения для стабилизирующих управлений $v_1(\mathbf{y}_2(t)), v_2(\mathbf{y}_2(t))$ принимают вид

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{y}_2(t)) = \left[-P_2^* \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{l} \mathbf{y}_2 + \frac{\mathbf{y}_2^2}{l} \right) - P_1^* \frac{\mathbf{y}_2^2}{l} \right] + \\ + \frac{-\frac{m}{T_5} y_{21} P_2^* \cos \alpha_2^* + (D - D_2^*) + mg(\sin(y_{22} + \theta_2^*) - \sin \theta_2^*)}{\cos(y_{23} - y_{22} + \alpha_2^*)}; \quad (38) \end{aligned}$$

$$v_2(\mathbf{y}_2(t)) = -\frac{I_3}{T_7} y_{14} - \left[M_{z_2}^* \left(2 \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{l} y_2 + \frac{\mathbf{y}_2^2}{l} \right) + M_{z_1}^* \frac{\mathbf{y}_2^2}{l} \right]. \quad (39)$$

Многопрограммное позиционное управление $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (5), (7) в окончательной векторной форме принимает вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k(t) \prod_{s=1, s \neq k}^N \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s(t))^2}{(\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_s(t))^2} + \mathbf{v}_1(\mathbf{y}_1(t)) + \mathbf{v}_2(\mathbf{y}_2(t)); \quad (40)$$

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_1(t), \quad \mathbf{y}_2(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_2(t). \quad (41)$$

Векторы $\mathbf{v}_1(\mathbf{y}_2(t))$ и $\mathbf{v}_2(\mathbf{y}_2(t))$ описываются выражениями (17), (23) и (38), (39) соответственно. Начальные условия $\mathbf{x}(t_0)$ любые в окрестностях векторов $\mathbf{x}_1(t_0)$ и $\mathbf{x}_2(t_0)$. Например, $\mathbf{x}(t_0)$ принадлежит диапазону между $\mathbf{x}_1(t_0)$ и $\mathbf{x}_2(t_0)$.

Траектории $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ составляют притягивающие многообразия для траектории $\mathbf{x}(t)$, порожденной МПУ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синергетические методы управления сложными системами: Механические и электромеханические системы / А.А. Колесников, Г.Е. Веселов, А.Н. Попов и др.; Под ред. А.А. Колесникова. – М.: Ком. Книга, 2008. – 304 с.
2. Воронов Е. М. Многокритериальный синтез позиционного управления на основе многопрограммной стабилизации. Ч. 1 // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2012. – № 2. – С. 3–19.
3. Соловьева И. В. Синтез многопрограммных систем управления на основе метода позиционной оптимизации: – Автореферат дисс... канд. физ.-мат. наук / СПб. гос. ун-т, 2010. – 15 с.
4. Зубов В. И. Синтез многопрограммных устойчивых управлений // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318. – № 2. – С. 274–277.
5. Смирнов Н. В. Задачи многопрограммной стабилизации в различных классах динамических систем // Труды Средневолжского мат. общ., 2005. – Т. 7. № 1. – С. 192–201.
6. Смирнов Н. В. Многопрограммная стабилизация линейных и билинейных систем в случае неполной обратной связи // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 3. – С. 40–44.
7. Смирнов Н. В. Соловьева И. В. Применение метода позиционной оптимизации для многопрограммной стабилизации билинейных систем // Вестник СПб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления, 2009. – Вып. 3. – С. 253–261.
8. Балашевич Н. В., Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. // – Т. 40, № 6. – С. 838–859.
9. Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. – М.: Ком. Книга, 2006 – 240 с.

Статья поступила в редакцию 31.05.2012

Евгений Михайлович Воронов окончил в 1963 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ye.M. Voronov graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1963. D. Sc. (Eng.), professor of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University.