

ОСОБЕННОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ФАКТИЧЕСКОГО КОНТАКТА ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ

М.В. Мурашов
С.Д. Панин

murashov@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Решение задач контакта в точном приборостроении и прецизионном машиностроении позволяет прогнозировать тепло- и электропроводность контактов, трение и износ деталей приборов. Определяющим параметром в контактной задаче является площадь фактического контакта. Рассмотрен способ определения площади фактического контакта при взаимодействии двух шероховатых тел под действием внешнего давления. На примере тел микронных размеров изучено влияние на результат плотности сеточного разбиения. Даны рекомендации по выбору плотности сеток для снижения погрешностей расчета. Проведено сравнение результатов расчетов для моделей с шероховатостью первого и второго уровней. Показано, что при отсутствии учета размерного эффекта внедрения при переходе на модель с шероховатостью второго уровня площадь фактического контакта меняется несущественно

Ключевые слова

Фактическая площадь контакта, шероховатость, метод конечных элементов, упругопластическая деформация, ANSYS

Поступила в редакцию 28.07.2015

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

Задачи контакта твердых тел играют важную роль в точном приборостроении, электродинамике, трибологии, а также в автомобильной, аэрокосмической и атомной отраслях промышленности и др. Существенные проблемы при описании контактов возникают в интенсивно развивающихся областях микро- и нанотехнологий, особенно при проектировании микроэлектромеханических устройств.

Площадь фактического контакта деформированных поверхностей полностью определяет результаты последующих расчетов теплопроводности, трения и ряда других физических явлений. До сих пор не создано методики расчета площади фактического контакта ввиду сложной, часто хаотичной формы контактирующих поверхностей и отсутствия достаточного представления о механизмах взаимодействия элементов поверхностей на микроуровне.

Шероховатость в природе трехмерна, а двумерные модели контакта представляют собой упрощение. Одним из вариантов задания трехмерных шероховатых поверхностей является использование фрактальной функции

Веерштрасса — Мандельбротта [1] для считающегося представительным участка поверхности [2].

Возможные боковые взаимодействия или другое взаимное влияние соприкасающихся выступов в таком случае не рассматриваются, что характерно для большинства описанных в литературе моделей дискретного контакта [3]. Попытки учесть взаимодействие выступов в рамках статистического [4–9] и фрактального [10, 11] подходов не учитывали пластическое деформирование материала тел вне шероховатости и большие деформации [12]. Решением упругопластической задачи взаимодействия выступов явился переход к использованию конечно-элементных моделей [13–16]. Особенностью решения такой задачи является пространственное взаимодействие поверхностей с геометрической формой с изломами. Для задачи деформирования, кроме известной погрешности геометрической аппроксимации, в настоящей работе рассмотрено влияние на рассчитываемое значение площади фактического контакта разбиений на поверхности и по глубине.

Постановка задачи. В программном комплексе ANSYS решается нелинейная задача трехмерного упругопластического деформирования двух контактирующих шероховатых тел N и O объемом V^N и V^O с размерами $22,5 \times 22,5 \times 15$ мкм, ограниченных неподвижными поверхностями S^N и S^O . На основании предваритель-

ных вычислений высота тел выбрана 15 мкм, чтобы перемещения на верхней и нижней поверхностях были распределены достаточно равномерно. Тела имеют гладкие внешние поверхности и неидеальный контакт неровных поверхностей между собой (рис. 1). Обозначим через $S_1^N, S_2^N, S_3^N, S_4^N$ части поверхности $S^N = S_1^N \cup S_2^N \cup S_3^N \cup S_4^N$ и через $S_1^O, S_2^O, S_3^O, S_4^O$ части поверхности $S^O = S_1^O \cup S_2^O \cup S_3^O \cup S_4^O$.

Последовательно решаем квазистационарную задачу первоначального деформирования области контакта под действием внешнего давления. На поверхность S_1^N тела N действует внешнее давление P . Поверхность S_1^O закреплена от перемещений по оси z , а поверхности S_2^N и S_2^O закреплены от перемещений в ортогональных им направлениях. Трением пренебрегаем.

Перейдем к индексным обозначениям осей декартовой системы координат, заменим x, y, z на x_1, x_2, x_3 . Используем теорию течения и аддитивный подход к формированию приращений

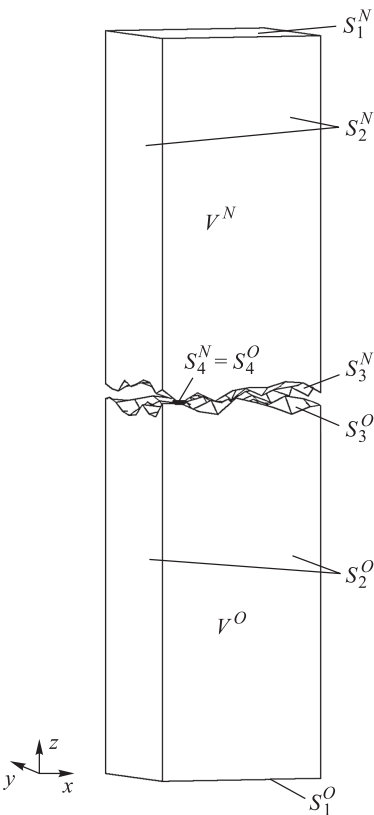


Рис. 1. Геометрическая схема

деформаций. Математическая модель представляет собой уравнения равновесия, обобщенный закон Гука, закон течения, соотношения Коши, критерий текучести Мизеса, соотношение для расчета контактных давлений расширенного метода Лагранжа и граничные условия:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}; \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda; \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (4)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\Phi(\varepsilon^p)^2; \quad (5)$$

$$p(x_i) = K\delta + \lambda, \quad x_i \in S_4^O; \quad (6)$$

$$\sigma_{33} = P, \quad x_3 \in S_1^N;$$

$$u_1(x_2) = 0, \quad u_2(x_1) = 0, \quad x_1, x_2 \in S_2^N + S_2^O; \quad (7)$$

$$u_i(x_3) = 0, \quad x_3 \in S_1^O,$$

где σ_{ij} и ε_{ij} — декартовы компоненты тензоров напряжений и деформаций; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера; s_{ij} — девиатор текущих напряжений; $d\lambda$, λ — множители Лагранжа; u_i — компоненты вектора перемещений; σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные напряжения; $\Phi(\varepsilon^p)$ — задаваемая функция кривой упрочнения материала; p — контактное давление; K — контактная жесткость; δ — зазор между контактирующими поверхностями; σ_{33} — компонент тензора напряжений.

Контактирующие поверхности сформированы следующим образом. На ровные поверхности тел, параллельные плоскости XOY , наносится сетка узлов, которые затем сдвигаются по нормали к поверхности на 0...5 мкм в соответствии с масштабированной фрактальной функцией Веерштрасса — Мандельброта [1, 2]. Для модели с шероховатостью первого уровня сетка имеет размер 4×4 узла, а для шероховатости второго уровня — 22×22 узла. Принятые параметры функции: размер поверхности $L = 0,0225$ мм, фрактальная шероховатость $G = 1 \cdot 10^{-6}$ мм, фрактальная размерность $D = 2,3$, масштабный параметр $\gamma = 1,5$, число волн $M = 10$, максимальный номер частоты $n_{\max} = 17$, длина отсечки $L_s = 1 \cdot 10^{-2}$ мм. Полученные негладкие поверхности, использованные в расчетах, показаны на рис. 2.

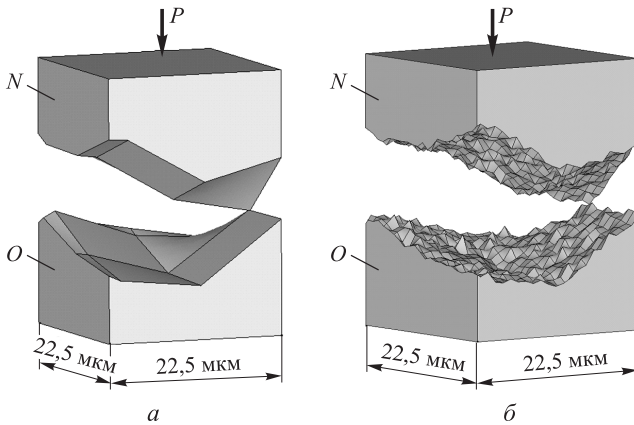


Рис. 2. Модели контакта шероховатых тел:

a — с шероховатостью первого уровня; *b* — с шероховатостью первого и второго уровней

Для моделирования деформирования объема материала использованы изопараметрические конечные элементы SOLID187. Элементами CONTA174 покрыта нижняя контактная поверхность, а элементами TARGE170 — верхняя.

Площадь контакта для всей поверхности в программном комплексе ANSYS определяется при включении параметра Contact area в инструменте Results Tracking.

Влияние плотности конечно-элементного разбиения. Для определения влияния поверхностной плотности сетки на площадь фактического контакта задачу решали на модели с шероховатостью второго уровня. Область контактирования неровных поверхностей до деформирования приведена на рис. 3. Материал — сталь с модулем упругости $E = 210$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$. Материал считается изотропно упрочняющимся, и диаграмму пластического деформирования аппроксимировали билинейно с пределом текучести $\sigma_T = 240$ МПа при касательном модуле $E_t = 10000$ МПа. Давление $P = 10$ МПа.

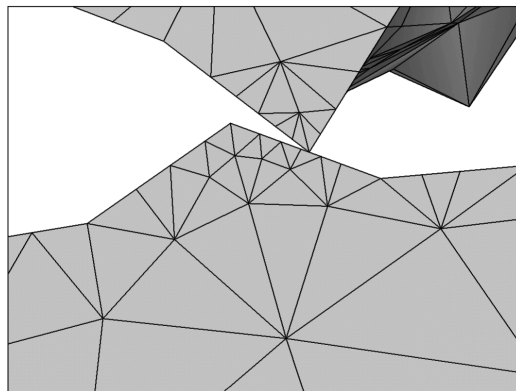
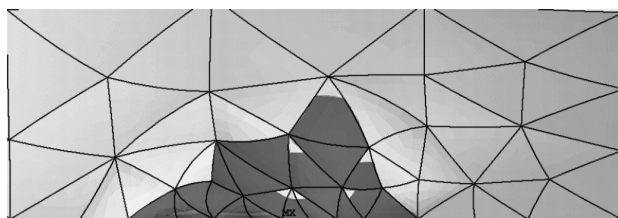


Рис. 3. Недеформированное состояние бугорков в области до контактирования

Для определения влияния ошибок аппроксимации сетку конечных элементов измельчали, соответственно увеличивая число шагов нагружения. Результаты расчетов без измельчения и с однократным и двукратным измельчениями в области контакта командой REFINE приведены в таблице и на рис. 4.

Площадь контакта в зависимости от измельчения сетки

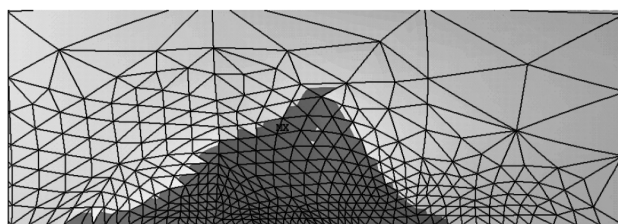
Параметры области контакта	Уровень измельчения		
	Без измельчения	Однократное	Двукратное
Число шагов нагружения	237	358	624
Площадь контакта, мкм ²	0,441	0,637	0,641
Изменение площади фактического контакта от измельчения, %	–	44	0,7
Число элементов в пятне контакта	20	102	359
Число элементов по краю пятна контакта (в сечении)	8	19	39
Перемещение по оси z, мкм	1,269	1,378	1,398
Приращение перемещения по оси z, %	–	8,6	1,5



a



б



в

Рис. 4. Изменение площади контакта от измельчения сетки:

a — без измельчения; *б* — однократное измельчение; *в* — двукратное измельчение

Отметим, что из-за несоответствия конечно-элементных сеток контактирующих поверхностей точно описать область фактического контакта не удастся и имеет место геометрическая погрешность до 10 % при отношении периметра области к среднему размеру конечных элементов, попадающих на периметр, более 10. При большем отношении погрешность уменьшается, и наоборот. Указанная особенность является одной из главных причин повышения точности при измельчении сеток (см. таблицу).

На неизмельченной сетке при деформировании гладких поверхностей часто заметно, что конечные элементы типа CONTA174 сминаются буграми, неровно. Неверная форма элементов и, следовательно, неверная форма поверхности приводят к физически необоснованным зазорам, что отражается на площади контакта. Элементы типа TARGE170 подвержены такому искривлению заметно меньше.

На рис. 5 приведены результаты расчета после смятия на неизмельченной сетке.

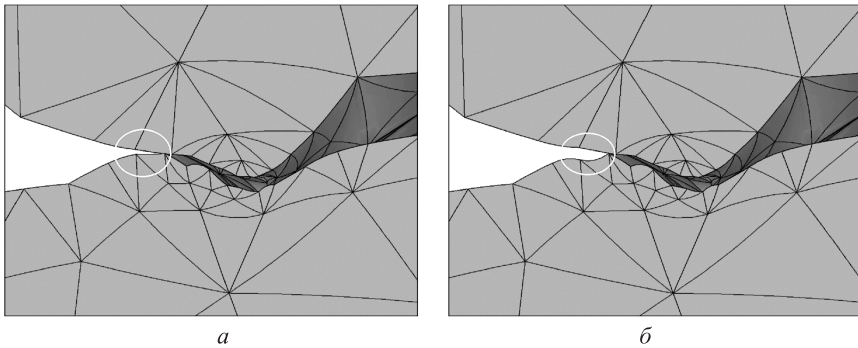


Рис. 5. Поверхности на шаге деформирования; обведена область элемента № 5825:
а — шаг № 219; б — шаг № 220

Искривление элементов CONTA174 формируется из-за особенностей реализации в ANSYS контактного алгоритма на основе расширенного метода Лагранжа. Например, при смене шага счета с № 219 на № 220 элемент SOLID187 № 5825 (CONTA174 № 35979) резко меняет свою кривизну — из выпуклого на вогнутый, узел глубоко продвигается в материал (см. рис. 5). В этот момент (шаг счета № 220) происходит скачок значений контактного проникания и контактной жесткости. При этом максимальная пластическая деформация достигает 0,33 при установленном ограничении 0,15, что требует дополнительных итераций. Изменение числа шагов нагружения не влияет на этот эффект.

При применении однократного измельчения поверхность становится заметно более гладкой (рис. 6). А при двукратном измельчении картина меняется незначительно. Таким образом, измельчать элементы более одного раза нецелесообразно.

Замечено, что искореженные элементы возникают, как правило, в области, напротив которой противоположная контактирующая поверхность расположена зубцом. Напротив таких зубцов следует изначально формировать элементы более правильной формы для более устойчивого счета.

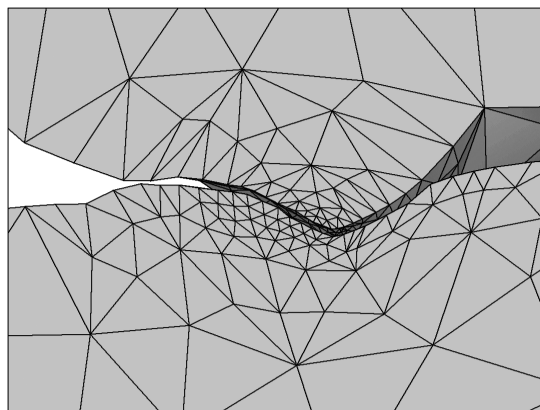


Рис. 6. Область контакта после деформирования при однократном измельчении

Избежать лишнего искривления элементов в таких случаях могло бы помочь скругление вершин элементов шероховатости. Вопросы скругления вершин рассматриваются в работе [17], а в [18, 19] получено, что наличие скругления может существенно изменить площадь фактического контакта. Отметим, что вершины реальных шероховатых поверхностей чаще острые, чем скругленные. Кроме того, скругленные вершины, видимо, более трудоемки в вычислениях и генерации сетки, так как необходимо мельчить сетку на вершине, а острые вершины не вызывают существенной неустойчивости в счете. Исходя из этого, примем вершины острыми.

В [20] предлагается внести изменение в функции формы конечных элементов, заменив полиномы Лагранжа на NURBS или T -сплайны для приближения конечно-элементной геометрии к геометрии, формируемой в CAD-системах. Наиболее актуально это может быть для областей контакта, когда площадь фактического контакта заметно зависит от точности описания геометрии тела. Аналогичный результат обычно можно получить, измельчив сетку в области контакта. Это увеличит время расчета, но с ростом производительности ЭВМ актуальность применения сплайнов может снижаться. Кроме того, при введении сплайнов, видимо, время вычисления также увеличивается. Применение сплайнов, возможно, позволит избавиться от погрешности решения, связанной с отсутствием непрерывности производных на границах конечных элементов. В ближайшей перспективе наиболее вероятным применением сплайнов в МКЭ видится использование их для создания программ-интерфейсов CAD-FEA.

При разбиении следует учитывать еще и то, что заметное влияние на величину вычисленной площади фактического контакта может оказывать равномерность объемной плотности сетки вблизи контактирующих элементов шероховатости (в области пластической деформации). В [21] выполнены расчеты на конечно-элементных моделях с различной объемной плотностью сетки и одинаковым числом поверхностных элементов. Погрешность определения площади фактического контакта при наименьшей объемной плотности элементов составила 42,64 %.

Влияние учета шероховатости второго уровня. Из-за повышенного упрочнения и влияния формы поверхность полностью не сглаживается и при наличии шероховатости второго уровня должна иметь меньшую площадь фактического контакта. В результате расчетов с устраненными погрешностями выявлена лишь небольшая разность в площадях.

Для сравнения были выбраны конечно-элементные модели с контактными элементами приблизительно одинаковых размеров (рис. 7). Материал тел — медь М2 с модулем упругости $E = 120$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,38$. Материал считается изотропно упрочняющимся, и диаграмма пластического деформирования [22] аппроксимирована мультитлинейной кривой с пределом текучести $\sigma_T = 69,6$ МПа. Одно пятно или одна область фактического контакта формируются при давлении $P = 8$ МПа.

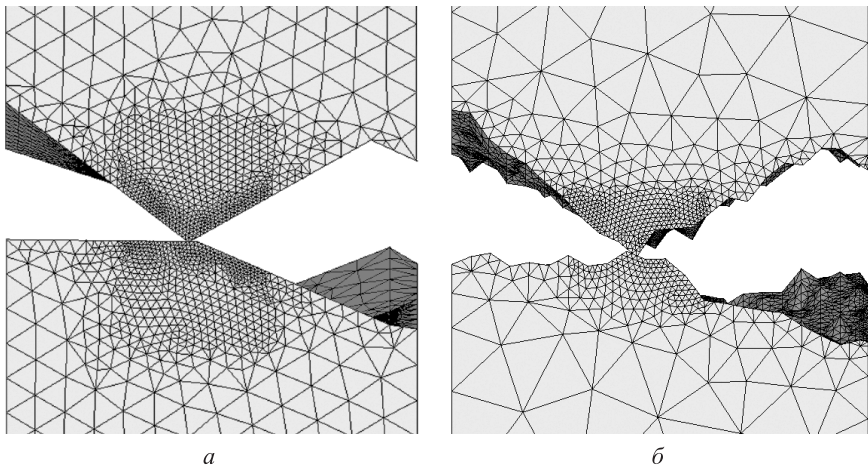


Рис. 7. Вид сбоку на конечно-элементные модели тел до нагружения
(*a, б* — см. рис. 2)

На рис. 8, 9 приведены результаты расчета формы пятна и площади фактического контакта.

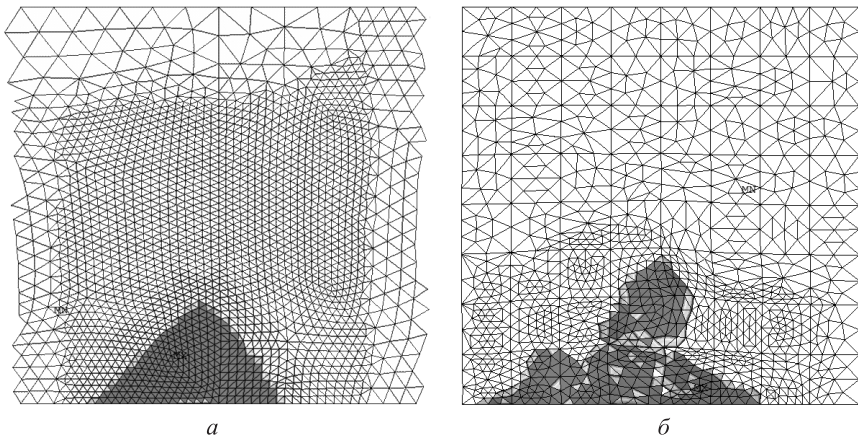


Рис. 8. Одна и та же область контакта (*a, б* — см. рис. 2)

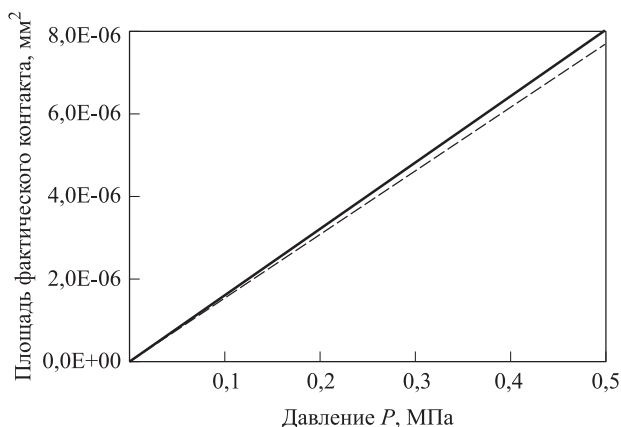


Рис. 9. Зависимость площади фактического контакта от нагрузки с учетом шероховатости второго уровня и без нее:

— — модель с шероховатостью первого уровня; - - - — модель с шероховатостью первого и второго уровней

Разность в площади фактического контакта поверхностей с шероховатостью второго уровня и без составила менее 4 %. Отметим, что в данном случае не учитывали предварительный наклеп и размерный эффект внедрения.

Сближение контактирующих тел составило 2,23 мкм для шероховатости первого уровня и 2,69 мкм для шероховатости второго уровня. Больше на 21 % сближение поверхностей с шероховатостью второго уровня возникает из-за того, что объем материала в деформируемых вершинах в этом случае меньше.

На рис. 10 видны находящиеся вблизи поверхности, немного отстоящие от нее области повышенных напряжений и упрочнения.

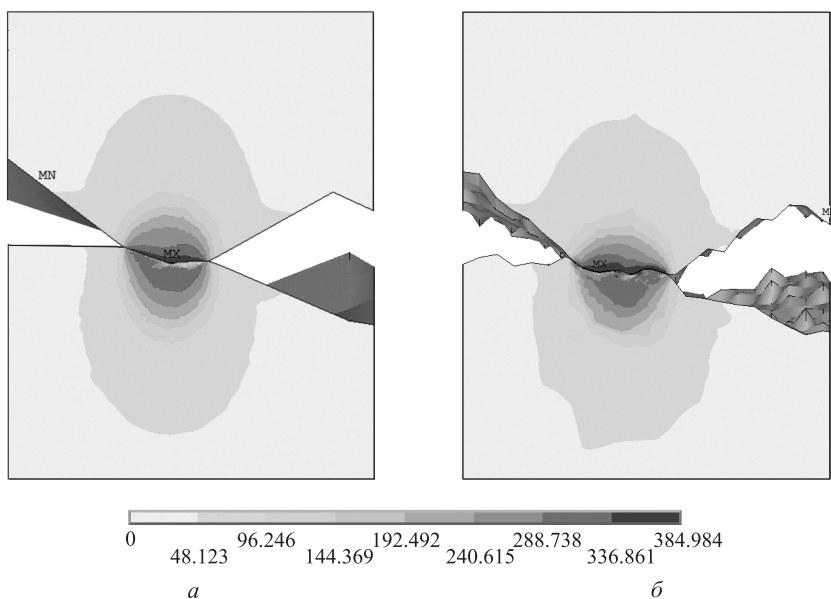


Рис. 10. Эквивалентные напряжения по Мизесу (а, б — см. рис. 2)

Заключение. В программном комплексе ANSYS деформирование при контакте рассчитывается физически правдоподобно при условии достаточно подробного конечно-элементного разбиения, при этом создаются небольшие искривления поверхностей, которых, возможно, нет в реальности. Влияние этих искривлений на сближение поверхностей незначительно и ими можно пренебречь. Когда требуется определить только сближение поверхностей, разбиение на конечные элементы должно быть настолько плотным, чтобы на каждое пятно контакта приходилось порядка 10 конечных элементов в сечении.

Однако пространственные искривления конечных элементов контактирующих поверхностей наряду с геометрическими погрешностями аппроксимации конечными элементами формы пятна оказывают существенное влияние на площадь фактического контакта. Для определения площади контакта с указанными погрешностями менее 1 % требуется дополнительное измельчение сетки для минимизации влияния искривлений. По проведенным оценкам в этом случае пятно контакта должно иметь до 20 и более конечных элементов в сечении.

Если пятен контакта много, то рекомендации по разбиению применимы к наиболее крупным пятнам. Более мелкие пятна разбиваются более грубо, исходя из пропорциональности погрешности доли площади пятна в общей площади фактического контакта. С другой стороны, не должно быть большой разности в разбиении пятен, чтобы избежать останова счета из-за искривления элементов.

Без учета предварительного наклепа и размерного эффекта внедрения вводить шероховатость второго уровня в задачу деформирования нецелесообразно, поскольку это заметно усложняет конечно-элементную модель. В задаче же теплопроводности имеется слабая зависимость теплового потока от формы контактирующих бугорков. Соответственно, через пятна контакта (см. рис. 8) будет передаваться разное количество теплоты.

Эксперименты дают значительно меньшие значения контактной теплопроводности по сравнению с расчетами по детерминированным моделям. Основной причиной этого является не многоуровневая шероховатость в отдельности, а в соединении с дополнительным сопротивлением деформированию из-за резко повышенных механических характеристик материала вследствие предварительного наклепа и размерного эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ausloos M., Berman D.H. A multivariate Weierstrass — Mandelbrot function // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. 1985. Vol. 400. P. 331–350. DOI: 10.1098/rspa.1985.0083
2. Yan W., Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces // Journal of Applied Physics. 1998. Vol. 84. P. 3617–3624. DOI: 10.1063/1.368536
3. Goryacheva I.G. Contact mechanics in tribology. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 364 p.
4. Zhao Y., Chang L. A model of asperity interactions in elastic-plastic contact of rough surfaces // ASME Journal of Tribology. 2001. Vol. 123. P. 857–864. DOI: 10.1115/1.1338482

5. *Sahoo P., Banerjee A.* Asperity interaction in elastic-plastic contact of rough surfaces in presence of adhesion // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2005. Vol. 38. P. 2841–2847. DOI: 10.1088/0022-3727/38/16/016
6. *Sahoo P., Banerjee A.* Asperity interaction in adhesive contact of metallic rough surfaces // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2005. Vol. 38. P. 4096–4103. DOI: 10.1088/0022-3727/38/22/013
7. *Sahoo P.* Adhesive friction for elastic-plastic contacting rough surfaces considering asperity interaction // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2006. Vol. 39. P. 2809–2818. DOI: 10.1088/0022-3727/39/13/026
8. *Ciavarella M., Greenwood J.A., Paggi M.* Inclusion of “interaction” in the Greenwood and Williamson contact theory // *Wear*. 2008. Vol. 265. P. 729–734. DOI: 10.1016/j.wear.2008.01.019
9. *Paggi M., Ciavarella M.* The coefficient of proportionality between real contact area and load, with new asperity models // *Wear*. 2010. Vol. 268. No. 7. P. 1020–1029. DOI: 10.1016/j.wear.2009.12.038
10. *Hanaor D.A.H., Gan Y., Einav I.* Contact mechanics of fractal surfaces by spline assisted discretization // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 59. P. 121–131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.01.021
11. *Paggi M., Barber J.R.* Contact conductance of rough surfaces composed of modified RMD patches // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011. Vol. 54. Iss. 21. P. 4664–4672. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.06.011
12. *Sahoo P., Ghosh N.* Finite element contact analysis of fractal surfaces // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2007. Vol. 40. P. 4245–4252. DOI: 10.1088/0022-3727/40/14/021
13. *Thompson M.K.* A multi-scale iterative approach for finite element modelling of thermal contact resistance: PhD. thesis, Cambridge, MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2007. 100 p.
14. *Сычев М.П., Мурашов М.В.* Моделирование контактного сопротивления // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. 2011. Спецвып. «Информационные технологии и компьютерные системы». С. 12–18.
15. *Murashov M.V., Panin S.D.* Modeling of thermal contact conductance. Proceedings of the International heat transfer conference IHTC14, August 8–13, 2010. Washington, DC, USA. Vol. 6. P. 387–392. DOI: 10.1115/IHTC14-22616
16. *Murashov M.V., Panin S.D.* Numerical modelling of contact heat transfer problem with work hardened rough surfaces // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. Vol. 90. P. 72–80. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.06.024
17. *Thompson M.K., Thompson J.M.* Considerations for the incorporation of measured surfaces in finite element models // *Scanning*. 2010. Vol. 32. No. 4. P. 183–198. DOI: 10.1002/sca.20180
18. *Kwon O.H., Thompson M.K.* The effect of surface smoothing and mesh density for single asperity contact: Proceedings of the International Conference on Surface Metrology, Worcester, MA, 2009. 5 p.

19. *Kwon O.H.* Investigation on the effect of mesh density and surface smoothing for real rough surfaces in contact. M.S. Thesis, Korea Advanced Institute of Science and Technology. Department of Civil and Environmental Engineering, 2009. 93 p.
20. *Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines / R. Dimitri, L. De Lorenzis, M.A. Scott, P. Wriggers, R.L. Taylor, G. Zavarise // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2014. Vol. 269. P. 394–414. DOI: 10.1016/j.cma.2013.11.002
21. *Thompson M.K.* A Comparison of methods to evaluate the behavior of finite element models with rough surfaces // *Scanning.* 2011. Vol. 33. P. 353–369. DOI: 10.1002/sca.20252
22. *Соппротивление деформации и пластичность металлов при обработке давлением / Ю.Г. Калпин, В.И. Перфилов, П.А. Петров, В.А. Рябов, Ю.К. Филиппов.* М.: Машиностроение, 2011. 244 с.

Мурашов Михаил Владимирович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Защита информации» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Панин Сергей Дмитриевич (1945–2015) — д-р техн. наук, профессор, работал на кафедре «Защита информации» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мурашов М.В., Панин С.Д. Особенности конечно-элементного решения задачи определения площади фактического контакта шероховатых тел // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение.* 2016. № 4. С. 19–32. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-4-19-32

FEATURES OF A FINITE ELEMENT SOLUTION TO CALCULATING REAL CONTACT AREA OF ROUGH BODIES

M.V. Murashov

murashov@bmstu.ru

S.D. Panin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Precision engineering predicts thermal and electrical contact conduction as well as friction and wear of instrument parts by analyzing contact mechanics. Real contact area is a key parameter for such an analysis. In this article we describe a method to determine the real contact area of the interaction of two rough bodies under the external pressure. Using micron-sized bodies contact example we studied the effect of the mesh density on the result. The article helps choose the mesh density to reduce calculation errors. We compared the calculation results for the first and second level roughness models. Our findings show that, disregarding the indentation size effect, the real contact area does not change substantially when choosing a model with the second level roughness

Keywords

Real contact area, roughness, finite element method, elastic-plastic deformation, ANSYS

REFERENCES

- [1] Ausloos M., Berman D.H. A multivariate weierstrass-mandelbrot function. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1985, vol. 400, pp. 331–350. DOI: 10.1098/rspa.1985.0083
- [2] Yan W., Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces. *Journal of Applied Physics*, 1998, vol. 84, pp. 3617–3624. DOI: 10.1063/1.368536
- [3] Goryacheva I.G. Contact mechanics in tribology. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1998. 364 p.
- [4] Zhao Y., Chang L. A model of asperity interactions in elastic-plastic contact of rough surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 2001, vol. 123, pp. 857–864. DOI: 10.1115/1.1338482
- [5] Sahoo P., Banerjee A. Asperity interaction in elastic-plastic contact of rough surfaces in presence of adhesion. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2005, vol. 38, pp. 2841–2847. DOI: 10.1088/0022-3727/38/16/016
- [6] Sahoo P., Banerjee A. Asperity interaction in adhesive contact of metallic rough surfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2005, vol. 38, pp. 4096–4103. DOI: 10.1088/0022-3727/38/22/013
- [7] Sahoo P. Adhesive friction for elastic-plastic contacting rough surfaces considering asperity interaction. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2006, vol. 39, pp. 2809–2818. DOI: 10.1088/0022-3727/39/13/026
- [8] Ciavarella M., Greenwood J.A., Paggi M. Inclusion of “interaction” in the Greenwood and Williamson contact theory. *Wear*, 2008, vol. 265, pp. 729–734. DOI: 10.1016/j.wear.2008.01.019
- [9] Paggi M., Ciavarella M. The coefficient of proportionality between real contact area and load, with new asperity models. *Wear*, 2010, vol. 268, no. 7, pp. 1020–1029. DOI: 10.1016/j.wear.2009.12.038
- [10] Hanaor D.A.H., Gan Y., Einav I. Contact mechanics of fractal surfaces by spline assisted discretization. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 59, pp. 121–131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.01.021
- [11] Paggi M., Barber J.R. Contact conductance of rough surfaces composed of modified RMD patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2011, vol. 54, iss. 21, pp. 4664–4672. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.06.011
- [12] Sahoo P., Ghosh N. Finite element contact analysis of fractal surfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2007, vol. 40, pp. 4245–4252. DOI: 10.1088/0022-3727/40/14/021
- [13] Thompson M.K. A multi-scale iterative approach for finite element modelling of thermal contact resistance: PhD. thesis, Cambridge, MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2007. 100 p.
- [14] Sychev M.P., Murashov M.V. Modelling of contact resistance. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr., Spetsvyp* “Informatsionnye tekhnologii i komp'yuternye sistemy” [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng., Spec. Issue “Information technologies and computer systems”], 2011, pp. 12–18 (in Russ.).
- [15] Murashov M.V., Panin S.D. Modeling of thermal contact conductance. *Proceedings of the International heat transfer conference IHTC14*, August 8–13, 2010, Washington, DC, USA, vol. 6, pp. 387–392. DOI: 10.1115/IHTC14-22616

- [16] Murashov M.V., Panin S.D. Numerical modelling of contact heat transfer problem with work hardened rough surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, vol. 90, pp. 72–80. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.06.024
- [17] Thompson M.K., Thompson J.M. Considerations for the incorporation of measured surfaces in finite element models. *Scanning*, 2010, vol. 32, no. 4, pp. 183–198. DOI: 10.1002/sca.20180
- [18] Kwon O.H., Thompson M.K. The effect of surface smoothing and mesh density for single asperity contact. *Proceedings of the International Conference on Surface Metrology*, Worcester, MA, 2009. 5 p.
- [19] Kwon O.H. Investigation on the effect of mesh density and surface smoothing for real rough surfaces in contact. M.S. Thesis. Korea Advanced Institute of Science and Technology, Department of Civil and Environmental Engineering, 2009. 93 p.
- [20] Dimitri R., De Lorenzis L., Scott M.A., Wriggers P., Taylor R.L., Zavarise G. Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, vol. 269, pp. 394–414. DOI: 10.1016/j.cma.2013.11.002
- [21] Thompson M.K. A Comparison of methods to evaluate the behavior of finite element models with rough surfaces. *Scanning*, 2011, vol. 33, pp. 353–369. DOI: 10.1002/sca.20252
- [22] Kalpin Yu.G., Perfilov V.I., Petrov P.A., Ryabov V.A., Filippov Yu.K. Soprotivlenie deformatsii i plastichnost' metallov pri obrabotke davleniem [Resistance to deformation and plasticity of metals treated by pressure]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2011. 244 p.

Murashov M.V. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Information Security Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Panin S.D. (1945–2015) — Dr. Sci. (Eng.), Professor, worked at the Department of Information Security, Bauman Moscow State Technical University.

Please cite this article in English as:

Murashov M.V., Panin S.D. Features of a Finite Element Solution to Calculating Real Contact Area of Rough Bodies. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 4, pp. 19–32. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-4-19-32