

В. Ю. А л и в е р

**ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В НЕПРЕРЫВНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Приведена методика анализа качества хаотического поведения непрерывных динамических систем, включающая в себя новые алгоритмы.

В настоящее время в радиотехнике можно особо выделить одно из направлений исследований — это передача информационных сигналов с использованием хаотических колебаний. Такое направление возникло сравнительно недавно, в последние десятилетия XX в. До сих пор системы связи, в которых применяется динамический хаос, не получали широкого распространения. Поэтому исследования в данной области остаются актуальными. В работах [1, 2] показано, что хаотическая модуляция имеет ничуть не меньшее право на существование, чем другие виды — амплитудная, частотная, фазовая. Хаотические сигналы имеют ряд преимуществ перед другими [1–3], но при этом приемопередающие системы, использующие хаотические колебания, требуют повышенного внимания и больших знаний при их проектировании. Это заключается в следующем: во-первых, в отличие от других видов модуляции для эффективного приема хаотических колебаний применение методов оптимальной фильтрации становится необходимым [1, 2]; во-вторых, для построения систем передачи информации, использующих хаотическую несущую, требуется устойчивый хаотический режим используемого генератора хаоса. Если вместо хаотического будет регулярный режим, то такое важное свойство, как скрытность передачи информации, будет утеряно. Поэтому при эксплуатации систем связи с хаотическими колебаниями следует совершенно четко определить границы в пространстве параметров, по разные стороны которых наблюдается различное поведение нелинейных динамических систем.

Методам исследования хаотических режимов в генераторах хаоса и использованию этих методов посвящены многие работы [4–14]. Однако поскольку проектировщикам коммуникационных систем с хаотической несущей необходимо точно знать диапазоны допустимых значений параметров нелинейных систем, при которых возникает хаос, и определенные свойства конкретных генераторов хаоса, то появляется потребность в уточнении границ возможных диапазонов и сведении всех разрозненных методов в единое целое. Вопрос наглядного представления областей различного поведения динамических систем

в многомерном пространстве параметров остается актуальным. Таким образом, цель настоящей работы — разработка и представление методики, позволяющей легко, быстро и достоверно выявлять диапазоны значений параметров самых разных нелинейных динамических систем, при которых существуют хаотические колебания. Для достижения этого использованы методы численного интегрирования и создано необходимое программное обеспечение.

Далее приводится последовательность действий, которые следует выполнять, если требуется определить значения параметров какой-либо динамической системы, при которых существует хаотический режим. Представленная методика не является строгой: какие-либо шаги можно пропустить или поменять местами.

В результате анализа динамической системы должны появиться качественные и количественные характеристики хаоса: бифуркационные диаграммы и диаграммы показателей Ляпунова, спектры, фазовые траектории, временные последовательности, сечения Пуанкаре. Если эти характеристики не противоречат друг другу, то анализ можно считать завершенным, а полученные допустимые значения параметров учитывать при построении коммуникационных систем. Если в полученных характеристиках имеются противоречия, то их следует устранить путем повторного анализа. Как правило, в этом случае следует уменьшить шаг изменения изучаемого параметра (для бифуркационных диаграмм и диаграмм показателей Ляпунова) или/и увеличить неучитываемую и отбрасываемую долю переходного процесса во временной последовательности (для фазовых траекторий, спектров, сечений Пуанкаре).

По мнению автора, большей своей частью данная методика является методикой, представленной Ф. Муном в 1991 г. и изложенной в работе [4]. Однако в предлагаемый анализ введено два новых пункта: линейный анализ устойчивости динамических систем — поиск неустойчивых точек равновесия, вблизи которых возможен хаос (этот анализ давно известен, но практически отсутствует в работе [4]); использование слухового восприятия помимо визуального — прослушивание хаотического сигнала (литературы по этому вопросу до 2005 г. не обнаружено!).

В рамках настоящей работы рассматриваются следующие непрерывные динамические системы: осциллятор Дуффинга, система Лоренца, генератор Чуа, фазовая автоподстройка (ФАП) 2 и 3-го порядков, автономная и неавтономная. Автор не претендует на открытие ранее неизвестных областей хаоса в перечисленных системах, так как они уже достаточно хорошо изучены [13]. Их исследование было проведено с целью, во-первых, отработать созданное программное

обеспечение на уже хорошо изученных системах — не должно быть противоречия с ранее полученными результатами; во-вторых, отлаженный математический аппарат позволяет всегда “иметь под рукой” столь необходимые при хаотической модуляции карты с различными режимами поведения динамических систем.

Этап 1. Линейный анализ устойчивости. Все исследования проводятся на основе одной из наиболее распространенных моделей динамической системы — на системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}), \quad (1)$$

где $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ — вектор переменных состояния системы; $\mathbf{g}(t, \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) = [g_1(t, \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) \ g_2(t, \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) \ \dots \ g_n(t, \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})]^T$ — некоторая функция состояния, характеризующая закон эволюции; $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_m]^T$ — вектор параметров системы, n — целое число, порядок динамической системы, m — целое число, количество параметров. Любая динамическая система может иметь особые точки — точки равновесия — такие значения переменных состояния x_1, x_2, \dots, x_n , при которых с течением времени эти значения не меняются. Состояние системы переходит в само себя. Неподвижные точки находятся из условия

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) = 0. \quad (2)$$

Положение равновесия может быть устойчивым или неустойчивым. Если малое возмущение со временем возвращает динамическую систему в прежнее неподвижное состояние, то такое положение равновесия называется устойчивым по Ляпунову. В противном случае оно считается неустойчивым.

Для того чтобы определить тип особой точки (устойчивая или нет) с помощью линейного приближения, следует решить систему линейных ДУ, описывающих эволюцию малого возмущения:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}(t) = \left[\frac{dg_i}{dx_j} \right] \bigg|_{x=x^0(t)}, \quad (3)$$

где $x^0(t)$ — стационарное состояние системы — частное решение. Решение уравнений (3) находят в виде

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_{11}(t) \exp(\lambda_1 t) + c_{12}(t) \exp(\lambda_2 t) + \dots + c_{1n}(t) \exp(\lambda_n t), \\ y_2(t) &= c_{21}(t) \exp(\lambda_1 t) + c_{22}(t) \exp(\lambda_2 t) + \dots + c_{2n}(t) \exp(\lambda_n t), \\ &\dots \dots \dots \\ y_n(t) &= c_{n1}(t) \exp(\lambda_1 t) + c_{n2}(t) \exp(\lambda_2 t) + \dots + c_{nn}(t) \exp(\lambda_n t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $c_{ij}(t)$ — полином некоторой степени с неопределенными коэффициентами, $(i, j) = 1, 2, \dots, n$, n — порядок системы (1) и (4), λ_j — показатели Ляпунова.

Если хотя бы у одного из всех λ_j действительная часть положительна, то исследуемая точка равновесия $x^0(t)$ неустойчива. Это говорит о том, что в динамической системе (1) могут существовать хаотические колебания. Их можно обнаружить на следующих этапах анализа, меняя параметры $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ системы (1). При этом начальные значения параметров, а также и начальные условия должны быть такими, чтобы эволюция вектора состояния X во времени происходила вблизи неподвижных точек, как неустойчивых, так и устойчивых, либо между ними. Таким образом, цель описываемого анализа заключается, с одной стороны, в определении значений состояния X и параметров μ , с которых начинается исследование для выявления хаотических колебаний в системе, а с другой стороны, необходимо выявить, как ведет себя система при разных параметрах μ и начальных условиях в окрестностях точек равновесия.

Если все показатели Ляпунова содержат отрицательные действительные части, то исследуемая точка равновесия $x^0(t)$ асимптотически устойчива. Если хотя бы у одного λ_j действительная часть равна нулю (чисто мнимый или нулевой λ_j), то проводить исследование по линейному приближению в этом случае нельзя [8].

Показатели Ляпунова являются собственными числами матрицы A , поэтому их следует находить из линейного уравнения:

$$A - \lambda E = 0, \quad (5)$$

где E — единичная матрица.

Подробное изложение линейного анализа устойчивости точек равновесия можно найти в работах [5–8, 13].

Этап 2. Бифуркационные диаграммы и диаграммы показателей Ляпунова. Бифуркационные диаграммы. Как уже было сказано ранее, при проектировании систем передачи информации, использующих модуляцию параметра нелинейной динамической системы, необходимо точно знать допустимый диапазон переменного параметра, т.е. тот диапазон его возможных значений, при котором наблюдаются хаотические колебания. Ясно, что чем шире этот диапазон, тем предпочтительней рассматриваемая нелинейная система и рассматриваемый набор параметров. “Протяженность” интервала допустимых значений модулируемого параметра является важным качественным критерием выбора какого-либо конкретного генератора хаоса и конкретных значений его параметров.

Наиболее простой способ определить поведение системы при различных значениях параметров — получить бифуркационные диаграммы. Они наглядно иллюстрируют различные типы поведения системы при изменении параметров. Под термином “бифуркация” понимают внезапную скачкообразную перестройку движения при незначительном изменении числового значения параметра. Если задать параметры и начальные условия нелинейной системе, а затем численно проинтегрировать ее в течение некоторого заданного интервала наблюдения T , то в конце этого интервала вектор состояния системы примет некоторое числовое значение. Это значение можно запомнить и отобразить графически так, чтобы горизонтальной оси соответствовало числовое значение изменяемого параметра, а вертикальной — числовое значение одной из переменных состояния. Затем можно изменить ведущий параметр, не меняя при этом никакие другие, и повторить процедуру. В результате многократного выполнения описанных действий и появится так называемая бифуркационная диаграмма — диаграмма значений переменной состояния динамической системы в фиксированный момент времени для различных значений изменяемого параметра. Интервал наблюдения T должен быть выбран таким, чтобы все переходные процессы в системе к концу этого интервала завершились. Пример бифуркационной диаграммы приведен на рис. 1, *a*.

Ранее было отмечено, что значения, отображаемые графически на диаграмме, должны браться в конце наблюдаемого временного интервала, но на самом деле это не обязательно. Можно отбирать и графически отображать все значения переменной состояния, удовлетворяющие некоторому определяемому самим исследователем правилу, т.е. производить выборку значений. Например, можно отбирать все значения переменной состояния $x(t)$, которые удовлетворяют условию $y(t) = 0$. Или можно отбирать все значения переменной состояния через определенный промежуток времени, например через длительность периода вынуждающего воздействия. В этом случае на бифуркационной диаграмме можно будет увидеть так называемые удвоения периодов.

Бифуркационная диаграмма может быть одномерной (однопараметрической, т.е. когда меняется один параметр) или двумерной (двухпараметрической — меняются два параметра). Ранее речь шла об одномерной диаграмме. Если диаграмма двумерная, то вместо ряда числовых значений, появляется таблица. Таким образом, можно сказать, что двумерная (плоскостная) бифуркационная диаграмма представляет собой таблицу значений переменной состояния в конце наблюдаемого временного интервала при двух меняющихся параметрах. Пример двумерной бифуркационной диаграммы представлен на рис. 2 (*a, в, д*).

Главное свойство бифуркационной диаграммы заключается в том,

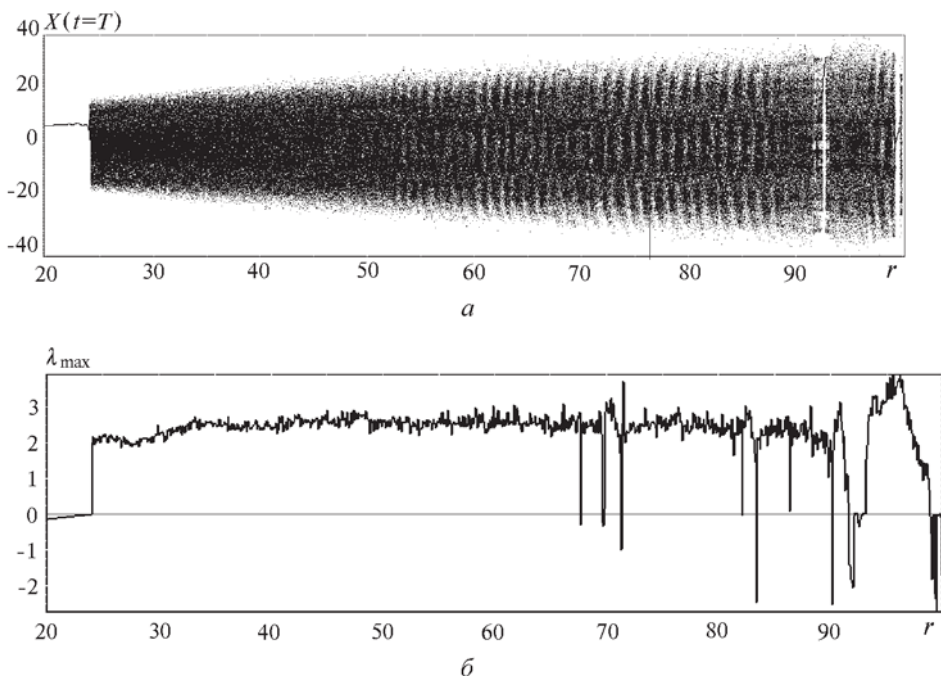


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для величины $x(t)|_{t=T}$ при $T = 50$ (а) и максимальный показатель Ляпунова λ_{\max} (б) для системы Лоренца при переменной r и фиксированных $p = 10$ и $b = 2,6666666$. Параметры интегрирования: длина реализации $T = 50$ (а) и $T = 1000$ (б), шаг $h = 0,01$. Число значений переменных параметров 400 000 (а) и 1000 (б)

что в случае регулярного режима числовые значения в соседних ячейках таблицы (или в соседних ячейках ряда чисел) меняются плавно при незначительном изменении одного из параметров. В случае хаотического движения появляются резкие скачки числовых значений переменной состояния при сколь угодно малом приращении параметра, если интервал наблюдения T достаточно велик. Это свойство и позволяет легко разграничить области параметров, соответствующие различным режимам.

В данной работе двумерные бифуркационные диаграммы представлены следующим образом. Числовым значениям одной из переменных состояния соответствуют свои цветовые оттенки: чем светлее точка на диаграмме, тем больше значение переменной состояния. Области бифуркационной карты с плавным изменением цвета свидетельствуют о регулярном движении. Участки диаграммы с резким изменением цвета в соседних точках указывают на существование хаотического режима в этих участках.

Диаграммы максимального показателя Ляпунова. Одна из количественных мер хаоса — максимальный показатель Ляпунова (далее в работе будем условно называть его “показатель Ляпунова”). Эта вели-

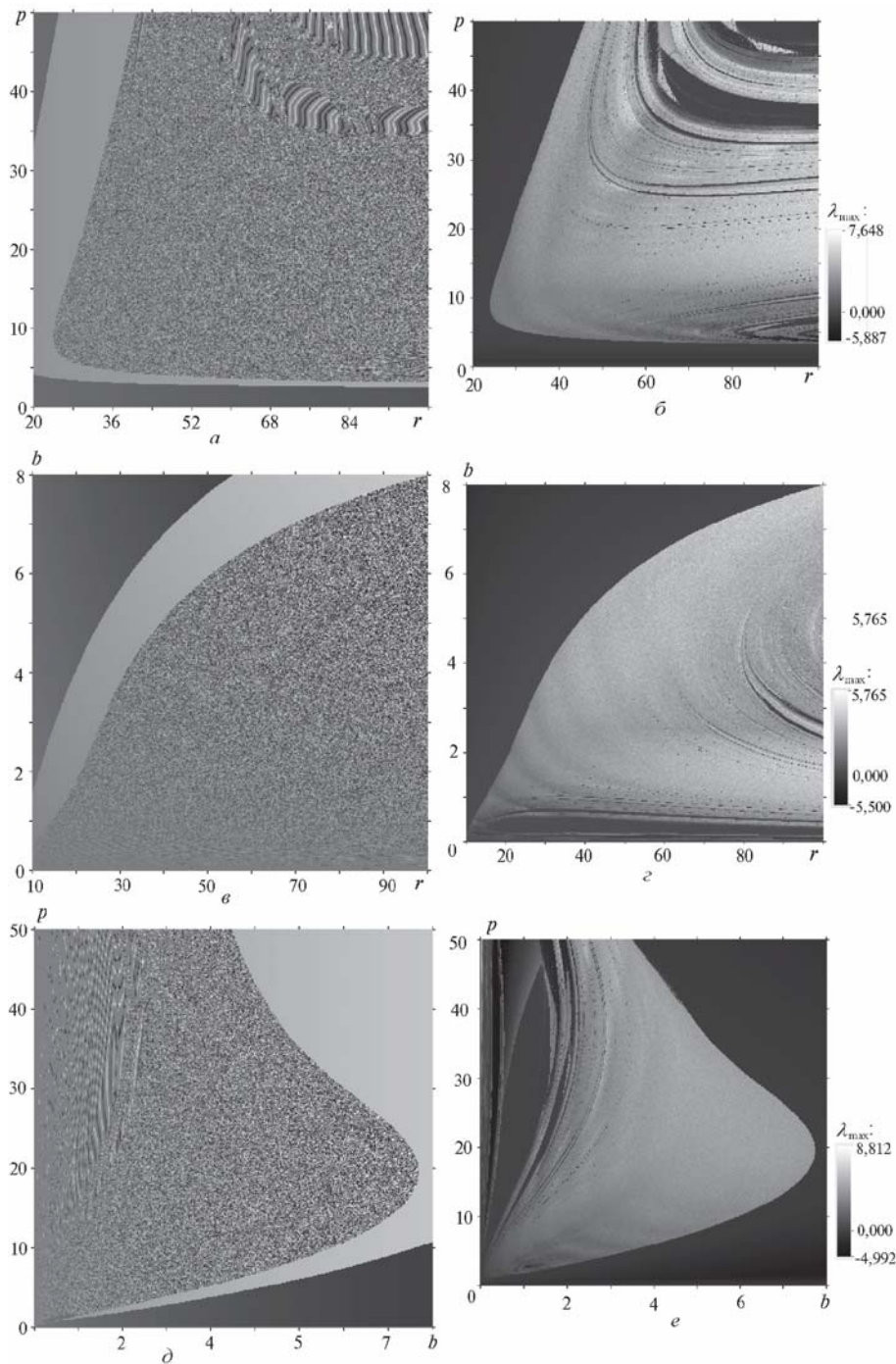


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для величины $x(t)|_{t=T}$ (a, b, d) и диаграмма максимального показателя Ляпунова λ_{\max} (b, z, e) для системы Лоренца в плоскости параметров $r-p$ при $b = 2,6666666$ (a, b); $p = 10$ (e, z); $r = 50$ (d, e). Параметры интегрирования: длина реализации $T = 50$ (a) и 600 (a, b, d и b, z, e соответственно), шаг $h = 0,01$. Число значений переменных параметров 400×400

чина представляет собой меру расхождения изначально близких друг другу траекторий в фазовом пространстве. Если показатель Ляпунова λ_{\max} положителен, то это означает, что близкие фазовые траектории экспоненциально расходятся и движение в динамической системе хаотическое. Причем чем он больше, тем быстрее расходятся траектории, и тем хаос больше согласно этой мере его оценивания. Если показатель Ляпунова отрицателен, то траектории сближаются и движение регулярное. Если $\lambda_{\max} = 0$, то расстояние между фазовыми траекториями либо не меняется, либо увеличивается в соответствии с более медленно растущей функцией, нежели экспонента (например, увеличивается линейно).

Диаграмма показателя Ляпунова представляет собой функцию параметра (параметров) динамической системы: $\lambda_{\max}(p)$, где p — переменный параметр. Все другие условия получения $\lambda_{\max}(p)$ остаются неизменными, меняется только p : для каждого значения p ставится в соответствие значение $\lambda_{\max}(p)$, p меняется с некоторым фиксированным шагом. Как и бифуркационные диаграммы, диаграммы показателя Ляпунова бывают одномерные (однопараметрические $\lambda_{\max}(p)$) и двумерные (двухпараметрические $\lambda_{\max}(p_1, p_2)$, где p_1 и p_2 — меняющиеся параметры). Пример одномерной карты показателя Ляпунова представлен на рис. 1, б, двумерной — на рис. 2, (б,з,е).

В настоящей работе двумерные диаграммы λ_{\max} представлены следующим образом. Разным числовым значениям λ_{\max} соответствуют свои цветовые оттенки: чем светлее точка на диаграмме, тем больше λ_{\max} . Таким образом, наиболее светлые области карты показателя Ляпунова соответствуют положительным значениям λ_{\max} (хаотический режим), наиболее темные — отрицательным значениям λ_{\max} (регулярный режим). Участки диаграммы с промежуточными серыми оттенками соответствуют областям, в которых $\lambda_{\max} \approx 0$.

Методы вычисления λ_{\max} можно найти как в современных учебниках по нелинейной динамике [5, 6], так и в работах [4, 7], которые можно считать классическими.

Как видно из рис. 1 и 2, два критерия хаотических колебаний — бифуркационные диаграммы и диаграммы максимального показателя Ляпунова — рассматриваются совместно, потому что при установлении хаотического характера той или иной области значений параметров нельзя целиком полагаться только на одну из упомянутых характеристик из-за всякого рода капризов численных методов. Примеры проявления недостатков методов численного интегрирования можно найти в работе [13]. На практике эти два вида диаграмм очень хорошо дополняют друг друга, их часто строят одну под другой. Подобные рисунки широко распространены в литературе по хаосу. При получе-

нии диаграмм исследователь должен стараться добиться того, чтобы они говорили об одном и том же и не противоречили друг другу.

Предлагается следующий принцип построения бифуркационных диаграмм и диаграмм λ_{\max} . В первую очередь ориентироваться следует на те значения изменяемых и фиксированных параметров, при которых согласно линейному анализу устойчивости динамической системы возможен хаотический режим. Поскольку расчет диаграмм в вычислительном отношении достаточно длительный процесс, вначале шаг изменения параметров лучше установить крупным, а количество значений параметров сделать небольшим, например 50 значений одного параметра и 50 другого, при получении двумерной диаграммы. Затем, уточнив желаемую область параметров с помощью предварительных построений, можно уменьшать шаг их изменения. Постепенно уменьшая шаг сколь угодно сильно, можно провести сколь угодно точную границу между хаотическим и регулярным режимами поведения (по крайней мере, теоретически, т.е. без учета погрешности численных методов). Окончательная размерность двухпараметрической диаграммы может составлять, например, 200×200 точек, 300×300 точек или даже 1000×1000 точек. Длительность расчета в последнем случае на компьютерах IBM PC предпоследнего поколения (2004 г.) составляет несколько часов в зависимости от выбранных условий: длительности реализаций переменных состояния, шага и метода интегрирования, конкретной модели динамической системы. В результате проведенных исследований получают желаемые диаграммы, по которым легко можно будет видеть области параметров, соответствующих различным режимам поведения динамической системы (см. рис. 1, 2). К этим диаграммам всегда следует обращаться, когда при построении систем передачи информации на хаотической несущей требуется установить допустимый диапазон изменения модулируемого параметра (что очень важно для работ [1, 2]).

Этап 3. Временные последовательности, фазовые траектории и спектры. Существует достаточно много способов показать наличие хаотического режима в нелинейных динамических системах. Самым простым критерием, указывающим на хаотическое поведение, является временная последовательность, т.е. эволюция переменной состояния системы во времени: картина эволюции регулярная — хаоса нет, сложная запутанная временная реализация — возможно, хотя и не факт, что режим хаотический.

Траектория движения в фазовом пространстве и спектры временной последовательности также могут указывать на хаотическое поведение.

Траектория в фазовом пространстве, стремящаяся со временем це-

ликом заполнить его некоторую область, неповторяющаяся траектория, соответствует либо хаотическому движению, либо квазипериодическому движению в присутствии несоизмеримых частот. Сходящаяся с течением времени к некоторому замкнутому контуру траектория указывает на периодическое движение. Траектория, сходящаяся к точке, говорит о затухающем движении.

Четко выраженные пики и отсутствие размытости на графиках спектров указывают на наличие периодического или квазипериодического движения. Между тем, размытость графиков в целом или размытость отдельных пиков указывает либо на хаотическое движение, либо на затухающее регулярное движение.

Отображения Пуанкаре. При математическом моделировании динамических систем отображением называют временную выборку данных $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n), \dots, x(t_N)\}$, для которой вводят обозначение $x_n \equiv x(t_n)$. В простом детерминированном отображении величину x_{n+1} можно найти по значению x_n . Это часто записывают в виде разностного уравнения

$$x_{n+1} = g(x_n). \quad (6)$$

Понятие отображения обобщается и на большее число переменных. Если моменты выборки t_n подчиняются определенному правилу, обсуждаемому далее, это отображение называется отображением Пуанкаре.

Когда присутствует вынуждающее движение с периодом T , для получения отображения Пуанкаре естественно выделить выборку с $t_n = nT + t_0$, где $t_0 = \text{const}$ — момент начала движения. Это позволяет отличить периодические движения от непериодических. Если произвести выборку гармонического движения с периодом T , равным периоду колебаний, то отображение будет представлено одной точкой на фазовой плоскости. Если движение состоит из суммы нескольких гармонических составляющих с кратными частотами (субгармоническое колебание), то в случае выборки с периодом T , равным периоду самой высокочастотной гармоники, отображение Пуанкаре будет представлять собой конечный набор точек.

Важное и весьма полезное свойство отображения Пуанкаре заключается в том, что оно позволяет отличить субгармоническое движение от квазипериодического. Последняя разновидность движения представляет собой колебания на двух несоизмеримых частотах:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (7)$$

где ω_1/ω_2 — иррациональное число. Временная реализация и траектория в фазовом пространстве внешне выглядят при квазипериодическом движении так, как будто движение хаотическое, хотя ничего

общего между хаотическим и квазипериодическим процессами (7) нет. Однако разница между ними хорошо видна благодаря отображениям Пуанкаре: если в случае квазипериодического движения сделать выборку с периодом, соответствующим одной из частот, то траектория станет непрерывной замкнутой фигурой на фазовой плоскости.

Если же отображение Пуанкаре не состоит ни из конечного множества точек, ни из замкнутой орбиты, то соответствующее движение может быть хаотичным (рис. 3, z и 4, z).

Следует отметить, что существует грань между системами с затуханием и без него. В системах без затухания или со слабым затуханием отображения Пуанкаре хаотических движений часто имеют вид неупорядоченного скопления точек на фазовой плоскости. В системах с затуханием отображения Пуанкаре представляют собой бесконечные строго упорядоченные множества точек, концентрирующихся на подобии параллельных линий, как это показано на рис. 3, z и 4, z . Такую структуру называют фрактальной. Появление в отображении Пуанкаре фрактальных структур является сильным индикатором хаотических движений. Классы структур, встречающиеся в отображениях Пуанкаре, перечислены в работе [4].

Если динамическая система описывается ДУ не ниже 3-го порядка, то колебания в ней могут наблюдаться даже в том случае, когда эта система автономная (внешнее воздействие отсутствует). Тогда возникает вопрос, в какие моменты времени следует проводить измерения, чтобы получить отображение Пуанкаре.

Движение можно представить в виде траектории в фазовом пространстве. Следовательно, в случае автономных систем отображение Пуанкаре можно определить, построив в этом пространстве двумерную поверхность и следя за точками (x_n, y_n, z_n) , в которых фазовая траектория проходит сквозь эту поверхность. Тогда отображение Пуанкаре будет состоять из точек поверхности, через которые проходит фазовая траектория. Как частный случай, в качестве поверхности можно выбрать плоскость, например плоскость $x = 0$.

Более подробное описание отображений Пуанкаре и способов их получения можно найти в ряде книг по хаосу, например в работе [4].

Причина обязательного (по крайней мере, весьма желательного) получения всех перечисленных в настоящей работе характеристик заключается в том, что при исследовании поведения нелинейных динамических систем нельзя полагаться только лишь на одну из них или на небольшое их число (две-три). Нужно добиться того, чтобы бифуркационные диаграммы и диаграммы показателей Ляпунова не противоречили более “простым” характеристикам — временной последовательности, траектории в фазовом пространстве, спектру хаотическо-

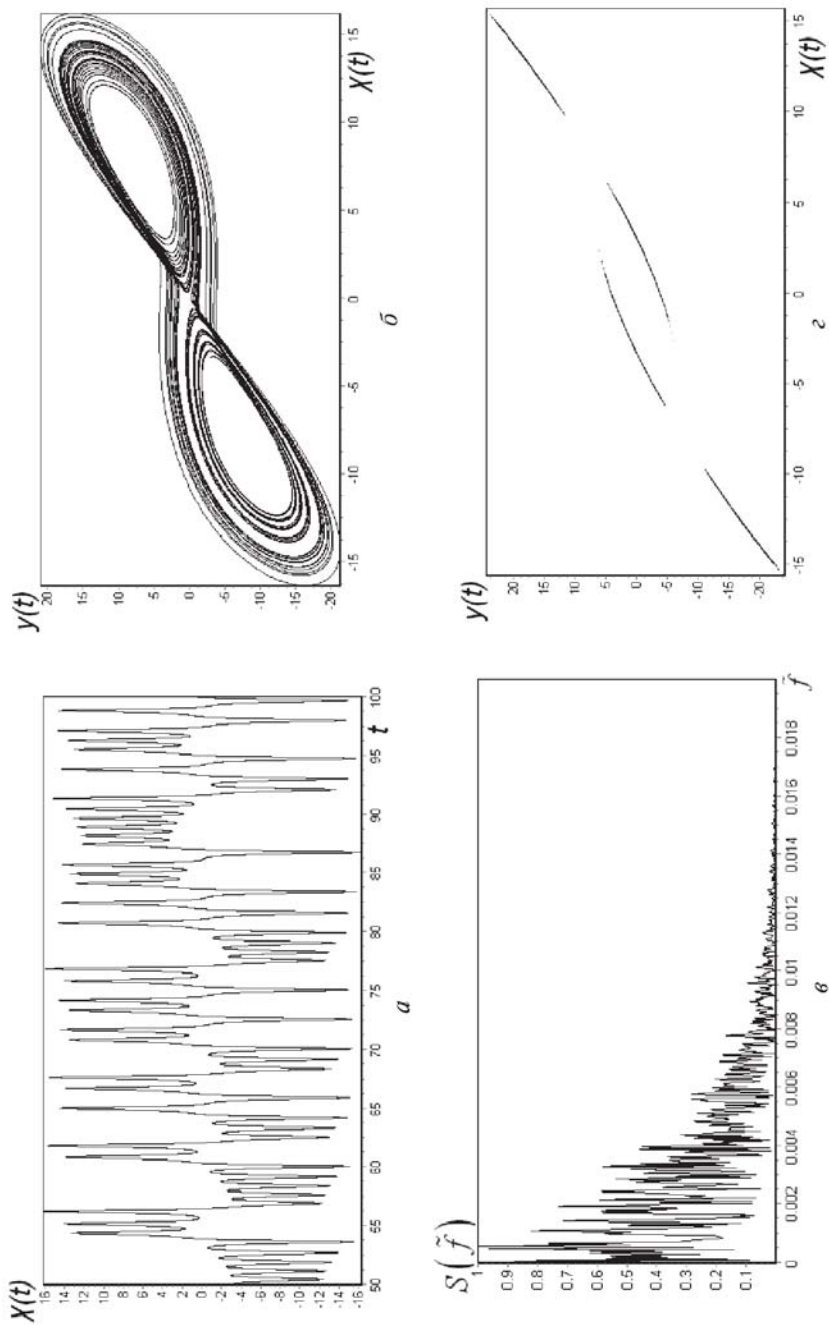


Рис. 3. Временная реализация $x(t)$ (а), проекция фазовой траектории на плоскость $x-y$ (δ), спектр реализации $x(t)$ (с) и отображение Пуанкаре при $z(t) = 24$ (z) для системы Лоренца. Значения параметров: $r = 25$, $p = 10$, $b = 2$, 6666666. Параметры интегрирования: длина реализации $T = 100$ ($a-e$) и $T = 10000$ (z), шаг $h = 0,001$. Длительность неотображенного переходного процесса $T_{пер} = T/2$

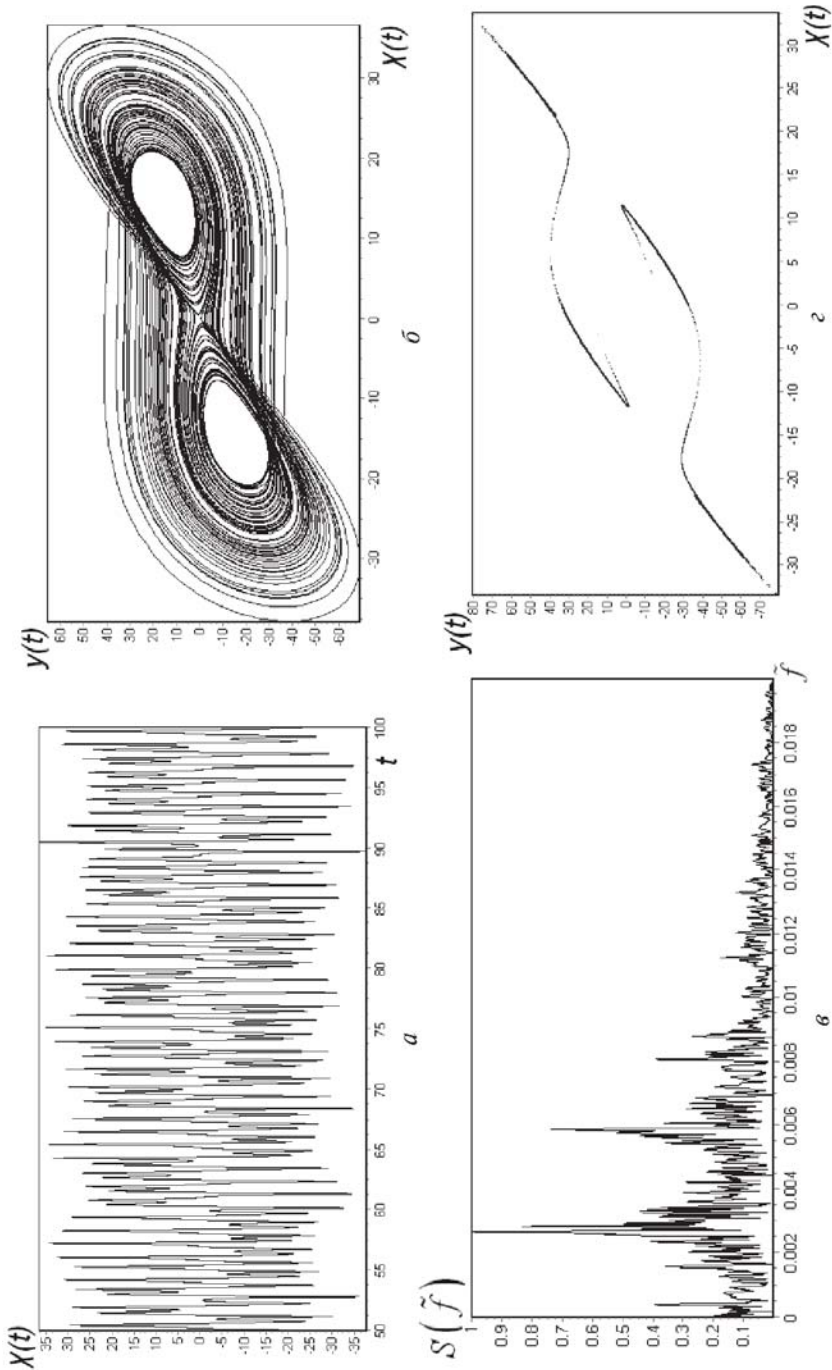


рис. 4. Временная реализация $x(t)$ (a), проекция фазовой траектории на плоскость $x-y$ (б), спектр реализации $x(t)$ (c) и отображение Пуанкаре при $z(t) = 97$ (z) для системы Лоренца. Значения параметров: $\tau = 98$, $p = 10$, $b = 2$, 66666666. Параметры интегрирования — см. рис. 3

го колебания и отображению Пуанкаре. Достоверность информации, которую дают бифуркационные карты и карты показателя Ляпунова, рекомендуется подтверждать перечисленными в этом разделе характеристиками хотя бы для нескольких выбранных значений меняющихся параметров.

Этап 4. Слуховой анализ режимов в генераторах хаоса. Все характеристики хаотических колебаний, перечисленные ранее и описанные в литературе, подразумевают визуальное восприятие исследователем. Для анализа этих характеристик и составления выводов на их основе о поведении хаотических систем используется зрительный аппарат. Однако зрение, хотя и предоставляет его обладателю 80 % информации о внешнем окружающем мире и тем самым является самым важным аппаратом мировосприятия, не единственный орган чувств. Известно, что слуховой аппарат является сложнейшим анализатором *нелинейных* акустических колебаний: человек легко различает и распознает как монотонные звуки, так и сложные музыкальные комбинации, такие как речь и чей-либо индивидуальный голос, шумоподобные звуки и самые разнообразные звуко сочетания. Ясно, что посредством слухового восприятия легко отличить шумоподобное колебание от любых других. Поэтому исследователю может невольно прийти идея преобразовать генерируемую временную хаотическую последовательность в акустические колебания. Интересно отметить, что в медицине для определения, здоров пациент или болен, часто пользуются помимо визуального, еще и слуховым аппаратом, используя, например стетоскоп. Так почему бы и в нелинейной динамике не использовать слуховой аппарат для “прослушивания” динамических систем! Тем более, что пациент — это та же динамическая система, только гораздо более сложная.

Идея применения слухового восприятия принадлежит В.М. Комарову [12]. Она была реализована автором данной работы. Им создана компьютерная программа, позволяющая легко получать как классические “визуальные” характеристики хаотических колебаний, так и звуковой файл формата «*.wav», в котором в качестве звуковых отсчетов содержатся отсчеты эволюции во времени одной из переменных состояния динамической системы. Частота следования этих отсчетов (частота дискретизации) может быть произвольным целым числом и задается пользователем в окне программы. Исходный код написан в среде Delphi. Большим достоинством возможности озвучивания, реализованного в программе, получившей имя “Sysviever”, является то, что эволюция вектора состояния во времени, подлежащая озвучиванию, может происходить как при постоянных параметрах генератора хаоса, так и при одном меняющемся во времени параметре. В слу-

чае переменного параметра звуковой файл, по сути дела, представляет собой так называемую *акустическую бифуркационную диаграмму* (однопараметрическую). При его прослушивании можно будет буквально “услышать” и “прослушать” изменение поведения динамической системы при изменении параметра.

Переменный параметр меняется в озвучиваемой реализации ступенчато. Какой именно это параметр из всех в выбранном генераторе хаоса, а также его начальное и конечное значения, шаг изменения, длина озвучиваемой последовательности и частота дискретизации задаются пользователем в окне программы.

Автором настоящей работы установлено, что шумоподобное или хаотическое колебание легко отличить от любых колебаний, имеющих очень и очень (если не сколь угодно!) сложную структуру, но не являющихся ни шумовыми (случайными), ни хаотическими (детерминированными). На слух хаотическое колебание воспринимается именно как шумоподобное — как некая помеха, очень похожая на некоторые помехи, прослушиваемые в приемнике сигналов радиовещания на коротких (10...100 м) волнах. Но теперь эта “помеха” может оказаться ничем иным, как хаотической несущей, т.е. сигналом, содержащим информацию!

Помимо всего описанного ранее, имеется еще одно преимущество использования слухового восприятия для анализа динамических систем. В многочисленной литературе по хаосу приводятся случаи, когда в генераторе хаоса при некоторых значениях параметров и начальных условий присутствует слишком длинный переходный процесс, имеющий сложный негармонический характер. Если на графике временной эволюции переменной состояния отображена лишь часть переходного процесса, то, приняв эту реализацию за устойчивые хаотические колебания, можно посчитать, что поведение системы хаотическое, хотя это не так! Кроме того, бывают случаи, когда хаотический режим чередуется во времени с периодическим, что при скрытной передаче информации было бы нежелательно. Выявить отмеченные тонкости с помощью “визуальных средств” тяжело, так как прорисовка большого числа точек на графиках (ведь реализация была бы очень длинной) заняла бы много машинного времени, особенно, если речь идет о бифуркационных диаграммах или диаграммах показателя Ляпунова. Однако, если создать звуковой файл как с постоянными параметрами, так и с одним переменным параметром, машинного времени потребуется достаточно мало, так как оно не будет затрачиваться на создание визуальных графиков. Также не понадобится пристально всматриваться в слишком протяженную временную реализацию.

Таким образом, достоверность информации, которую дают бифуркационные карты и карты показателя Ляпунова, нелишнее подтвердить как другими “визуальными” критериями, так и путем слухового анализа, хотя бы для нескольких выбранных значений параметров.

Пример исследования поведения нелинейных динамических систем — система Лоренца. В 1963 г. в своей статье [14] Э. Лоренц предложил простую математическую модель тепловой конвекции в атмосфере в виде системы трех нелинейных обыкновенных ДУ 1-го порядка и обнаружил, что в такой простой модели могут возникнуть совершенно хаотические движения.

Э. Лоренц изучал тепловую конвекцию в горизонтальном слое жидкости, находящемся в поле сил тяжести и нагреваемом снизу (см. рис. 5). Любая возникшая между произвольными элементами жидкости разность температур приводит к разности плотностей этих элементов. Если жидкость при этом помещена в гравитационное поле, то оно создает силы, приводящие к движению жидкости, называемому тепловой конвекцией. В случае жидкости, расположенной в слое, ограниченном двумя горизонтальными пластинами с высокой теплопроводностью, тепловой подогрев нижней пластины повышает плавучесть прилегающих к ней элементов жидкости, поскольку происходит их расширение. Всплывая наверх, частицы охлаждаются в слоях вблизи более холодной верхней пластины и под действием силы тяжести опускаются вниз. При определенных условиях происходит самоорганизация движения жидкости, и в слое образуются конвективные эквидистантные валы, формирующиеся иногда в серию вращающихся цилиндров, горизонтальные оси которых параллельны более коротким сторонам прямоугольных пластин.

Если разность температур $T_1 - T_2 = \Delta T$ чересчур мала, конвективные валы не образуются из-за вязкости жидкости, и теплота передается вверх с помощью механизма теплопроводности. Наоборот,

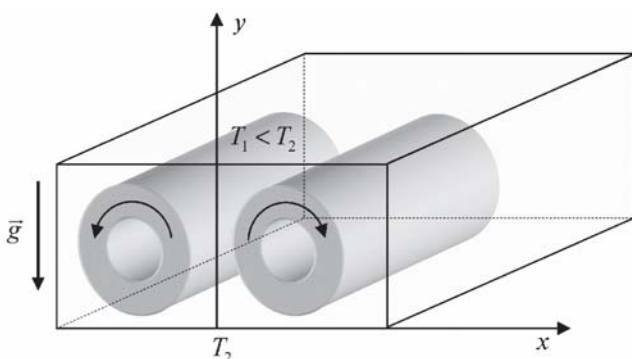


Рис. 5. Схематическое изображение конвективных валов в подогреваемой снизу жидкости

при увеличении ΔT структура конвективных валов становится более сложной, но определенная регулярность сохраняется. При дальнейшем существенном увеличении ΔT регулярная структура полностью разрушается, и движение жидкости становится турбулентным — хаотическим.

Следует отметить, что строгая теория турбулентности чрезвычайно сложна, поскольку уравнения эволюции, описывающие конвективные явления в жидкости или газе, представляют собой нелинейные ДУ в частных производных, для которых не существует общих способов получения решений в аналитическом виде. Поэтому модель, предложенная Лоренцем, была по достоинству оценена математиками и впоследствии стала классической.

Знаменитые уравнения Лоренца имеют следующий очень простой вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{8}$$

Их вывод можно найти в ряде публикаций по хаосу, например в работе [14]. Переменная $x(t)$ представляет собой интенсивность движения. Она пропорциональна угловой скорости вращения конвективных валов. Переменные $y(t)$ и $z(t)$ характеризуют распределение температуры по кольцу, причем $y(t)$ дает разность температур между восходящими и нисходящими потоками на уровне центров валов, а $z(t)$ — отклонение вертикального профиля температуры от линейного, существующего в отсутствие конвекции, когда теплота передается от нижней пластины к верхней с помощью механизма теплопроводности.

Коэффициент b — геометрический множитель. Он связан с отношением числа валов к расстоянию между пластинами $a/b = 4/(1 + a^2)$. Параметр p — безразмерное отношение коэффициента вязкости к теплопроводности (число Прандтля). Параметр r — безразмерный градиент температуры, пропорционален разности температур между пластинами и связан с числом Рэлея.

Обратим внимание на структуру уравнений Лоренца. Первое из уравнений системы (8) линейное, а второе и третье помимо линейных слагаемых содержат нелинейные члены в виде произведений $x(t)z(t)$ и $x(t)y(t)$:

$\dot{x} = p(y - x)$		$+0$
$\dot{y} = rx - y$		$-xz$
$\dot{z} = -bz$		$+xy$
линейная часть		нелинейные добавки.

Таким образом, фактически Лоренц учел оба нелинейных эффекта — гидродинамический и тепловой — наиболее простым образом: он использовал элементарную арифметическую операцию — перемножение двух переменных величин.

С одной стороны, этот факт сам по себе имеет принципиальное значение. С другой стороны, очень важным является то, что имеется весьма благоприятная возможность для схемотехнического исполнения системы Лоренца — ведь схемы прецизионных интеграторов и операционных усилителей с линейными характеристиками давно освоены, а для работы без искажений схем электронных перемножителей нужно лишь умело ограничить динамический диапазон изменений их входных сигналов. Описания практических схем на базе модели Лоренца можно найти во многих работах, например в работе [15]. Большое внимание автора к модели Лоренца обусловлено именно возможностями использования ее модели для схемотехнического исполнения и применения в коммуникационных системах, использующих хаотические колебания.

Линейный анализ устойчивости системы Лоренца дает три точки равновесия: $O(0, 0, 0)$, $O_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$, $O_2(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Точка O устойчива при $0 < r < 1$ и неустойчива при $r > 1$. В соответствии с анализом, выполненным в работах [5, 13], существует некоторое критическое значение $r = r_{кр}$, при котором точки покоя O_1 и O_2 теряют устойчивость:

$$r_{кр} = p(p + b + 3)/(p - b - 1).$$

Для значений $p = 10$, $b = 8/3$ (которые использовал Лоренц) величина этого критического значения $r_{кр} \approx 24,736842$. При $r > r_{кр}$ все существующие точки равновесия оказываются неустойчивыми — в системе наступает хаос.

Приведенные в настоящей статье рис. 2–4 с высокой достоверностью характеризуют поведение системы Лоренца (8) при разных значениях параметров. Численные расчеты выполнялись в программе Sysviewer. Использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка. Первоначальные значения параметров были взяты с учетом результатов линейного анализа устойчивости. Начальные условия: $x(0) = -5$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$. Интервал вычисления λ_{\max} : $T_{\lambda_{\max}} \approx 3$, длительность неучитываемого переходного процесса $T_{пер} \approx 0,1T$, T — продолжительность всей реализации. На рис. 3, в и 4, в \tilde{f} — нормированная от 0 до 2π частота.

Заключение. В работе предложена методика анализа поведения динамических систем, позволяющая легко определять границы диапазонов значений параметров, соответствующих хаотическому поведению систем, а также с большой точностью проводить границы между областями с различным поведением. Создано и отлажено необходи-

мое программное обеспечение. Методика и программа Sysviever разработаны на классических генераторах хаоса — осцилляторе Дуффинга, системе Лоренца и схеме Чуа. Помимо перечисленных систем были проанализированы ФАП 2 и 3-го порядков. Хотя программа Sysviever работает только с определенным набором динамических систем, можно легко модифицировать этот набор, дополнив его другими (в том числе еще никем не исследованными) системами.

На основе анализа, выполненного согласно описанной методике, получены области значений параметров для нескольких динамических систем, при которых наблюдается хаотический режим. Даны практические рекомендации по выбору генераторов хаоса и конкретных значений их параметров для получения того или иного режима работы. Основные выводы следующие.

1. Установлено, что величина максимального показателя Ляпунова в областях с хаотическим поведением следующая: $\lambda_{\max} \approx 2$ — для системы Лоренца; $\lambda_{\max} \approx 0,3$ — для генератора Чуа; $\lambda_{\max} \approx 0,2$ — для осциллятора Дуффинга; $\lambda_{\max} \approx 0,2$ — для всех ФАП 3 и 2-го порядков. Следовательно, по критерию наибольшего λ_{\max} предпочтительнее всего система Лоренца.

2. Наиболее “протяженные” области допустимых значений параметров имеет система Лоренца (см. рис. 1, 2). Кроме того, у этого генератора хаоса в отличие от всех других (осциллятора Дуффинга, генератора Чуа, ФАП) число “вкраплений” с регулярным поведением невелико. Также следует учесть, что система Лоренца имеет малое число параметров и проста для схемотехнической реализации. Следовательно, в первую очередь, именно систему Лоренца можно предложить в качестве основы построения приемопередающих систем с хаотической модуляцией.

3. Области хаоса у динамических систем 3-го порядка значительно шире, чем у систем 2-го порядка и, следовательно, системы 2-го порядка допускают меньшее отклонение параметров от номинального значения.

4. Начальные условия практически не влияют на общий вид расположения хаотических областей.

5. В системах ФАП, в частности неавтономной ФАП 3-го порядка, имеется очень длительный — тысячи и десятки тысяч периодов центральной частоты хаотического сигнала — переходный процесс. Это необходимо принимать во внимание, так как в подобных случаях наблюдаемую временную реализацию недостаточно большой длительности можно ошибочно принять за хаотический процесс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А л и е р В. Ю. Использование расширенного фильтра Калмана для демодуляции хаотических колебаний // Вестник МГТУ им. Баумана. Серия “Приборостроение”. — 2005. — № 1. — С. 100–122.

2. А л и в е р В. Ю. Анализ квазиоптимальных систем передачи информации с хаотической модуляцией на помехоустойчивость // Радиотехника и электроника. – 2004.
3. Д м и т р и е в А. С., П а н а с А. И. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. – М.: Физматлит, 2002.
4. М у н Ф. Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
5. Д а н и л о в Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. – М.: Постмаркет, 2001.
6. А н и щ е н к о В. С. Знакомство с нелинейной динамикой. Лекции соровского профессора: Учеб. пособие. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
7. Н е й м а р к Ю. И., Л а н д а П. С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987.
8. К р и щ е н к о А. П., П о п о в В. С., Я к о в е н к о М. Г. Устойчивость автономных систем: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1991.
9. Г у б а н о в Д. А. Динамические свойства демодуляторов широкополосных сигналов на базе фазовых автоматических систем. Дис. ... канд. техн. наук / МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 1997.
10. Р у к а в и ц а К. А. Хаотическая динамика систем синхронизации. Дис. ... канд. техн. наук / МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2002.
11. Ш а х т а р и н Б. И., С и д о р к и н а Ю. А., А л и в е р В. Ю., К о б ы л к и н а П. И. Исследование режимов генераторов хаоса // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48, № 12. – С. 1471–1483.
12. К о м п ь ю т е р н ы й анализ фонокардиограмм / В.М. Комаров, В.Л. Моргунов, А.И. Монаенков и др. // Вопросы разработки радиоэлектронных систем и устройств в диагностике сердечно-сосудистых заболеваний: Сб. – М.: Радио и связь, 1984.
13. К а п р а н о в М. В., Т о м а ш е в с к и й А. И. Анализ фазовых траекторий в окрестностях особых точек 2-D и 3-D нелинейных динамических систем: Учеб. пособие по курсу “Теория колебаний”. – М.: МЭИ (ТУ), 2003.
14. L o r e n z E. N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of Atmospheric Sciences. – 1963. – V. 20, № 1. – P. 130–141.
15. С у о м о Т. L., О р р е н х е и м А. Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Application to Communications // Rhys. Rev. Letters. – 1993. – Vol. 71, № 1. – P. 65–68.

Статья поступила в редакцию



Вячеслав Юрьевич Аливер родился в 1978 г. Окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2002 г. Канд. техн. наук, старший преподаватель МИПК (СМ) МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области приема и обработки сигналов в системах связи, в области динамического хаоса.

V. Yu. Aliver (b. 1978). Ph. D. (Eng.), grate teacher of the MIPK (SM) of the Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of receiving and processing signals in communications, in the field of dynamic chaos.